

Università degli Studi di Padova

Metodi per la  
sintesi per modelli fisici

Gianpaolo Borin

27 ottobre 1998

# 1. Sistemi fisici: eccitatore e risuonatore

## 1.1 Analogia

### 1.1.1 Classificazione delle grandezze

Come è noto dalla teoria dei sistemi, è possibile istituire analogie tra sistemi fisici elettrici, meccanici traslatori, meccanici rotatori, idraulici o fluidodinamici, termici e così via [2]. In tutti questi sistemi si individuano grandezze particolari caratterizzate dalla proprietà per cui *il loro prodotto rappresenta una potenza*. Tra queste grandezze e tra i loro integrali è possibile scrivere relazioni che assumono significati analoghi al concetto elettrico di impedenza.

Nel seguito del documento, i sistemi elettrici saranno considerati (piuttosto arbitrariamente) “di riferimento”, nel senso che i concetti della teoria classica delle reti di bipoli lineari saranno utilizzati come riferimento per introdurre e spiegare i concetti propri dei sistemi meccanici traslatori e fluidodinamici. Questo punto di vista renderà quindi possibile studiare alcune delle proprietà notevoli legate alla struttura dei sistemi fisici prescindendo dalla natura delle variabili in gioco e riferendosi ad esse genericamente con i nomi di “corrente”, “carica”, “tensione” e così via.

È comune nella terminologia anglosassone identificare i fattori della potenza nella classe di sistemi studiati associando ad uno il concetto di *trans-variabile* (in inglese *across-variable* o *two-point variable*) inteso nel senso di “variabile il cui valore si misura ‘ai capi’”, e all’altro quello di *per-variabile* (in inglese *through-variable* o *one-point variable*) inteso nel senso di “variabile il cui valore si misura ‘su una sezione’”. Sebbene l’identificazione delle variabili possa essere condotta in modo alquanto arbitrario, nei sistemi elettrici è naturale identificare la trans-variabile con la tensione e la per-variabile con la corrente. Si osservi che il prodotto “trans-per” dà effettivamente origine ad una potenza, ma che il prodotto non è in alcun modo “orientato”: il significato dei due termini può essere scambiato liberamente. Si osservi altresì che spesso è la natura fisica delle variabili in esame a guidare l’identificazione, come nel caso dei sistemi elettrici.

Il rapporto della trans-variabile e della per-variabile nei sistemi elettrici assume il significato di *resistenza*, mentre opportune relazioni integro-differenziali introducono i concetti di elemento reattivo: *capacità* e *induttanza*. Per omogeneità formale, è quindi consuetudine considerare, accanto alle variabili per- e trans- le grandezze integrali delle stesse. In base a questa ulteriore classificazione si hanno quindi grandezze *intensive* (per- e trans- variabile il cui prodotto dà una potenza) e *estensive* (integrali delle per- e trans- delle variabili intensive). Nello schema seguente si mettono in evidenza le relazioni che legano queste quattro variabili.

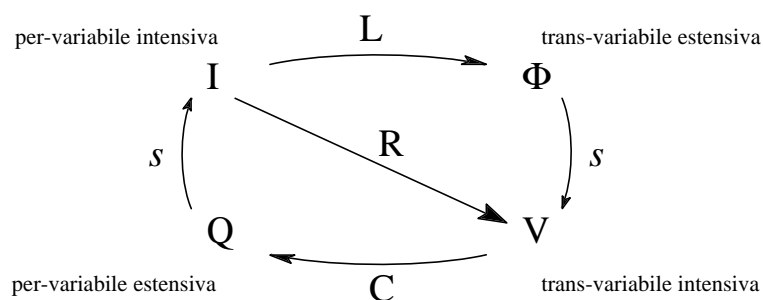


Fig. 1. Relazioni tra per- e trans- variabili intensive ed estensive

In questo schema le variabili sono quelle dei sistemi elettrici e si intendono L-trasformate;

- la per-variabile intensiva è la **corrente**
- la trans-variabile intensiva è la **tensione**
- la per-variabile estensiva è la **carica**
- la trans-variabile estensiva è il **flusso di induzione magnetica**
- da per-intensiva a trans-intensiva si passa moltiplicando per R (**resistenza**)
- da per-intensiva a trans-estensiva si passa moltiplicando per L (**induttanza**)
- da trans-intensiva a per-estensiva si passa moltiplicando per C (**capacità**)
- da estensiva ad intensiva si passa moltiplicando per  $s$  (derivando).

Come si vede, l'uso della trasformata di Laplace consente di utilizzare relazioni algebriche nella caratterizzazione delle grandezze.

Nei sistemi meccanici è naturale considerare come variabili intensive la *velocità* e la *forza*, il cui prodotto dà una potenza meccanica. Non è invece univoca l'associazione trans/per; nell'ultimo secolo si è affermata la cosiddetta *analogia di Maxwell* secondo la quale la velocità assume il significato di per-variabile intensiva (corrente) e la forza quello di trans-variabile intensiva (tensione)<sup>1</sup>. Nell'analogia di Maxwell, quindi, l'*attrito* gioca il ruolo della resistenza, in quanto costante di proporzionalità tra forza e velocità; le variabili estensive sono la *posizione* (integrale della velocità) e l'*impulso della forza* (integrale della forza, di dubbia interpretazione). Il passaggio da per-variabile estensiva e trans-variabile intensiva è dato dalla *costante elastica*, e quindi l'elasticità è l'analogo di un fenomeno *capacitivo* (lineare), mentre il passaggio da trans-variabile estensiva a per-variabile intensiva si ha attraverso la *massa* e quindi l'inerzia rappresenta l'analogo dei fenomeni *induttivi* (lineari).

Accanto all'analogia di Maxwell si può utilizzare la duale, nella quale la velocità assume il ruolo di trans-variabile intensiva e la forza quello di per-variabile intensiva; quest'ultima è detta *analogia di Firestone*. In questo caso l'*attrito* gioca il ruolo della conduttanza, mentre il significato di inerzia ed elasticità è scambiato. Sebbene l'analogia di Firestone abbia l'importante pregio di conservare la topologia degli schemi nel passaggio da meccanico a elettrico, come sarà chiarito nel seguito, essa è meno usata e non sarà più trattata in questo lavoro. Nel seguito, l'analogia meccanica tacitamente utilizzata sarà quindi quella di Maxwell.

In campo fluidodinamico, ove si studiano i fenomeni connessi con i gas ideali, è naturale identificare le variabili per e trans intensive con il *flusso* e la *pressione*. Anche in questo caso, dovendo operare una scelta, si opta per l'identificazione per-variabile=flusso, trans-variabile=pressione. Ancora una volta si invita a verificare che il prodotto per-trans è omogeneo ad una potenza [ $\text{Kg m}^2 / \text{s}^3$ ]. Le corrispondenti variabili estensive, quindi, sono rispettivamente il *volume d'aria* e l'*integrale della pressione* (in mancanza di miglior denominazione!). La *resistenza* fluidodinamica, quindi, è quella offerta da un tubo infinito di sezione costante ad un fronte d'onda piano; i fenomeni *capacitivi* si manifestano nella compressione di un volume d'aria e quindi sono associabili alle *cavità*, e i fenomeni *induttivi* sono dati dall'inerzia che il gas manifesta ad esempio all'interno di un *tubo corto* (ma non troppo sottile) rispetto alla lunghezza d'onda propagata nel sistema.

## 1. 1.2 Leggi di Kirchhoff

Come per i circuiti elettrici, i sistemi fisici obbediscono ad analoghi formali delle ben note *leggi di Kirchhoff*. Tali leggi nella nomenclatura data si esprimono come segue:

---

<sup>1</sup> Questa analogia trova la sua principale giustificazione nella definizione di *impedenza meccanica* data come rapporto (complesso) tra forza e velocità. Il motivo per cui non si considera il rapporto inverso dipende probabilmente dall'abitudine di considerare la forza come *causa* e la velocità come *effetto* allo stesso modo in cui in elettrodinamica si tende a considerare la tensione come causa e la corrente come effetto.

- In un circuito la somma delle per-variabili intensive che attraversano i rami entranti in un nodo è nulla (*legge di Kirchhoff ai nodi*).
- In un circuito la somma delle trans-variabili intensive ai capi dei rami costituenti una maglia è nulla (*legge di Kirchhoff alle maglie*).

In particolare, più elementi (bipoli) collegati in modo da essere interessati dalla stessa per-variabile intensiva si diranno *in serie*, mentre più elementi collegati in modo da essere interessati dalla stessa trans-variabile intensiva si diranno *in parallelo*. Si osservi che, scambiano il ruolo della per- e trans- variabile, si ottiene il cambio della topologia da serie a parallelo e viceversa.

**Esempio:** tre tubi collegati tra loro in un punto condividono in quel punto la pressione (stessa trans-variabile intensiva) e hanno flussi ripartiti diversamente secondo la loro sezione (per-variabili intensive diverse): sono quindi in parallelo tra loro.

**Esempio:** due corde collegate ad una massa condividono la stessa velocità (stessa per-variabile intensiva) ma in linea di principio agiscono su di essa con forze differenti (trans-variabili intensive diverse): sono quindi in serie tra loro. Si osservi che se si utilizzasse l'analogia di Firestone, il sistema sarebbe in parallelo.

Nella tabella seguente si riporta un riassunto delle analogie elettrica, meccanica e fluidodinamica.

Analoghi	Elettrico	Meccanico (Maxwell)	Meccanico (Firestone)	Fluidodinamico
per-variabile intensiva $\eta$	Corrente $I$	velocità $v$	forza $f$	flusso $u$
trans-variabile intensiva $\phi$	Tensione $V$	forza $f$	velocità $v$	pressione $p$
per-variabile estensiva $\mu$	Carica $Q$	posizione $x$	impulso forza $y$	volume $V$
trans-variabile estensiva $\delta$	Induzione $\Phi$	impulso forza $y$	posizione $x$	
da $\eta$ a $\phi$	$R$	attrito $A$	1/attrito ( $1/A$ )	res. Idraulica
da $\mu$ a $\phi$	$C$	molla $K$	massa $M$	Cavità
da $\delta$ a $\eta$	$L$	massa $M$	molla $K$	Inerzia

Fig. 2. Riassunto delle equivalenze tra sistemi analoghi

Nei capitoli seguenti, in luogo della nomenclatura astratta esposta in questo paragrafo, si utilizzerà spesso la denominazione che le variabili assumono nell'analogo elettrico; in luogo di trans-variabile intensiva si dirà quindi tensione, in luogo di per-variabile estensiva si dirà carica e si useranno liberamente i termini resistenza, conduttanza, capacità e induttanza.

## 1.2 Carichi e generatori

Si consideri la generica giunzione tra tratti di guide d'onda; secondo le ipotesi fatte sulle per e trans variabili che si propagano, tale giunzione si può definire di tipo *serie* o *parallelo*. Il concetto di giunzione, trattato in grande dettaglio in [3], riveste una particolare importanza nello studio dei modelli fisici; esso infatti, oltre a costituire il modello del raccordo tra elementi lineari costituenti un sistema meccanico o fluidodinamico distribuito, è il blocco fondamentale per la costruzione del modello di interazione tra eccitatore e risonatore.

## 1.2.1 Caso serie

Le ipotesi di giunzione serie relative a  $K$  elementi presumono che la corrente che attraversa gli elementi "serie" della rete sia uguale per tutti e sia quindi identificabile come  $I_J$ , mentre la somma delle tensioni di maglia  $V_i$  in accordo con le leggi di Kirchhoff sia nulla. In formule:

$$\sum_{i=1}^K V_i = 0 \quad I_1 = I_2 = \dots = I_K = I_J \quad (1)$$

Supponiamo che sulla giunzione insistano  $N$  tratti di linea, ciascuna di impedenza caratteristica  $R_j$  e tensione  $V_j$ ,  $M$  generatori di tensione ideali  $V_{gj}$  e  $P$  impedenze concentrate  $Z_j$ , in modo che  $N+M+P=K$ . Dalle ipotesi si ha:

$$\sum_{j=1}^N V_j + \sum_{j=1}^M V_{gj} = I_J \sum_{j=1}^P Z_j$$

Essendo inoltre:  $V_j = V_j^+ + V_j^-$  per  $j=1..N$  si ha:

$$\sum_{j=1}^N (V_j^+ + V_j^-) + \sum_{j=1}^M V_{gj} = I_J \sum_{j=1}^P Z_j$$

sommando e sottraendo  $\sum_j V_j^+$ :

$$2 \sum_{j=1}^N V_j^+ - \sum_{j=1}^N (V_j^+ - V_j^-) + \sum_{j=1}^M V_{gj} = I_J \sum_{j=1}^P Z_j$$

ed essendo  $V_j^+ = R_j I_j^+$  e  $V_j^- = -R_j I_j^-$  e quindi  $V_j^+ - V_j^- = R_j (I_j^+ + I_j^-) = R_j I_j$ :

$$\sum_{j=1}^N I_j R_j + I_J \sum_{j=1}^P Z_j = 2 \sum_{j=1}^N V_j^+ + \sum_{j=1}^M V_{gj}$$

ovvero, ricordando che  $I_j = I_J$ :

$$I_J = \frac{2 \sum_{j=1}^N V_j^+ + \sum_{j=1}^M V_{gj}}{\sum_{j=1}^N R_j + \sum_{j=1}^P Z_j} \quad (2)$$

Nota la corrente di giunzione  $I_J$  è immediato calcolare i contributi uscenti dalla giunzione dati i contributi entranti:

$$I_i^- = I_J - I_i^+ \quad (3)$$

Si può quindi concludere che, per conoscere le correnti di ciascun ramo di una giunzione serie, è possibile applicare la (3), la quale fornisce gli elementi incogniti (correnti uscenti) in funzione degli elementi noti (correnti entranti ed imposte).

Nel caso di una corda sollecitata, ad esempio,  $V_g$  è la forza  $f$  impressa dall'eccitatore al punto di giunzione ( $M=1$ ),  $I_J$  è la velocità  $v$  al punto di giunzione e l'impedenza totale di giunzione è  $2R$ , dove  $R$  è l'impedenza caratteristica della corda ( $P=0$ ,  $N=2$ ,  $R_1=R_2=R$ ). Sostituendo nella (2) si ottiene:

$$2Rv = f + 2\sum_{j=1}^2 f_j^+ = f + 2\sum_{j=1}^2 R_j v_j^+ = f + 2R\sum_{j=1}^2 v_j^+ = f + 2Rv_{in} \quad (4)$$

da cui:

$$v = \frac{f}{2R} + v_{in} \quad (5)$$

## 1. 2.2 Caso parallelo

Dualmente al caso visto in precedenza, le ipotesi di giunzione parallelo relative a  $K$  rami presumono che la tensione che insiste sugli elementi “parallelo” della rete sia uguale per tutti e sia quindi identificabile come  $V_J$ , mentre la somma delle correnti al nodo  $I_i$  in accordo con le leggi di Kirchhoff sia nulla. In formule:

$$\sum_{i=1}^K I_i = 0 \quad V_1 = V_2 = \dots = V_K = V_J \quad (6)$$

Supponiamo che sulla giunzione insistano  $N$  tratti di linea, ciascuna di ammettenza caratteristica  $G_j$  e corrente  $I_j$ ,  $M$  generatori di corrente ideali  $I_{gj}$  e  $P$  ammettenze concentrate  $\Gamma_j$ , in modo che  $N+M+P = K$ . Con calcoli del tutto analoghi al caso precedente si ha:

$$V_J = \frac{2\sum_{j=1}^N I_j^+ + \sum_{j=1}^M I_{gj}}{\sum_{j=1}^N G_j + \sum_{j=1}^P \Gamma_j} \quad (7)$$

Come nel caso precedente, nota la tensione di giunzione  $V_J$  è immediato calcolare i contributi uscenti dalla giunzione dati i contributi entranti:

$$V_i^- = V_J - V_i^+ \quad (8)$$

Anche in questo caso valgono le osservazioni fatte sopra.

Nel caso di un tubo cilindrico sollecitato, ad esempio,  $I_g$  è il flusso  $u$  iniettato dall'eccitatore al punto di giunzione ( $M=1$ ),  $V_J$  è la pressione  $p$  nello stesso punto e l'ammettenza totale di giunzione è  $G$ , cioè l'ammettenza caratteristica del tubo ( $P=0, N=1$ ). Sostituendo nella (7) si trova:

$$Gp = u + 2u^+ = u + 2Gp^+ = u + 2Gp_{in} \quad (9)$$

da cui:

$$p = 2p_{in} + \frac{u}{G} = 2p_{in} + Ru \quad (10)$$

## 1. 3 Eccitatore come elemento di perturbazione

Un collegamento tra eccitatore e risuonatore è riconducibile allo schema (semplificato) di figura:

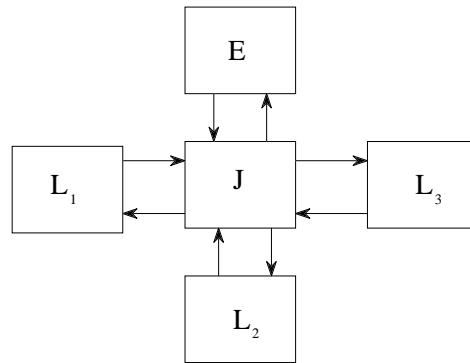


Fig. 3. Sistema eccitatore-risunatore: E è un elemento di eccitazione, attivo e non lineare; J è un elemento di giunzione che implementa le ipotesi serie-parallelo;  $L_i$  è un elemento risonante lineare, dinamico e passivo.

L'accoppiamento E-R (eccitatore risunatore) soddisfa ad una equazione analoga a quelle viste sopra; in ogni caso l'eccitatore è visto come un elemento in grado di perturbare uno o più punti del risunatore. Nella pratica comune, l'elemento J, normalmente lineare, si considera incorporato nell'eccitatore o nel risunatore, secondo criteri di semplicità formale.

## 1.4 Aspetti generali dell'accoppiamento E-R

In astratto, quindi, un sistema eccitatore-risunatore può sempre essere pensato come in figura:

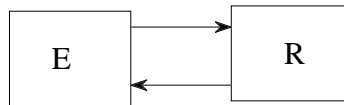


Fig. 4. schema di principio della connessione E-R

L'obiettivo fondamentale nello studio del modello di interazione è definire le relazioni intercorrenti tra le grandezze all'uscita dei blocchi E ed R e quelle all'ingresso degli stessi; tali grandezze sono dette *variabili di scambio*.

Nei sistemi fisici, tra le variabili di scambio è possibile identificare una per- e una trans-variabile, assieme ad integrali e derivate delle stesse. L'accoppiamento, quindi, soddisfa alle leggi di Kirchhoff.

Complessivamente, quello rappresentato è un sistema dinamico non lineare:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{A}\mathbf{x}_R + \mathbf{B}\mathbf{u}_R \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{C}\mathbf{x}_R + \mathbf{D}\mathbf{u}_R \end{array} \right\} \text{risunatore}$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_E = \mathbf{f}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \\ \mathbf{y}_E = \mathbf{g}(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E) \end{array} \right\} \text{eccitatore}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{y}_E = \mathbf{u}_R \\ \mathbf{y}_R = \mathbf{u}_E \end{array} \right\} \text{collegamento}$$
(11)

I sottosistemi E ed R contengono una dipendenza ingresso-uscita reciproca e istantanea; ciò non rappresenta un problema nel mondo analogico, ma in quello numerico questo fatto dà luogo ad un potenziale problema di non computabilità. Se infatti si passa con un metodo opportuno ad una descrizione numerica, ci si trova nella situazione di figura:

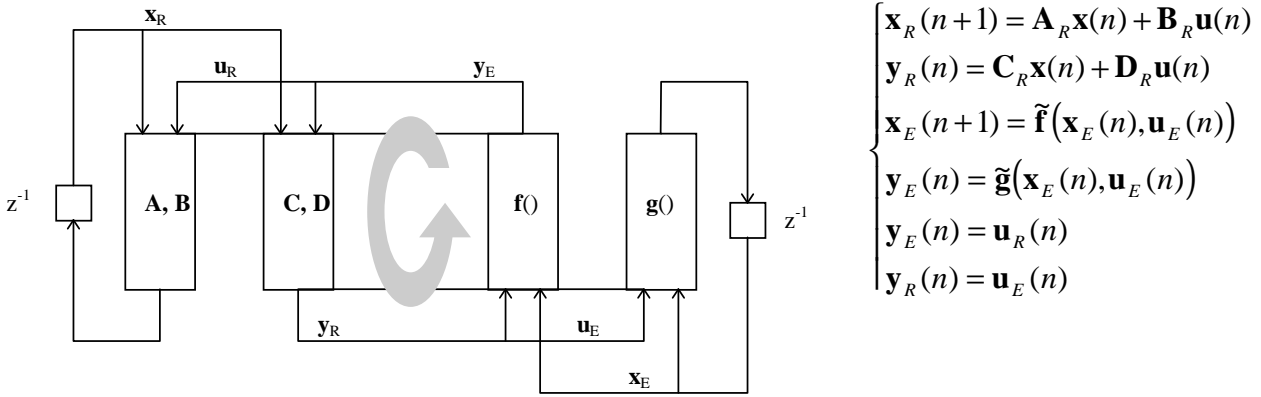


Fig. 5. schema della connessione E-R e non computabilità

L'anello in colore mostra una dipendenza ingresso uscita mutua e istantanea che causa il problema della non computabilità. Questa situazione è tipica del passaggio da sistema a tempo continuo a sistema a tempo discreto.

### 1.5 Struttura interna dell'eccitatore

Come evidenziato sopra, in seguito alla discretizzazione di un sistema Eccitatore-Risuonatore è possibile l'insorgere di problemi di non computabilità. Questo problema è altresì spesso presente all'interno della struttura dell'eccitatore stesso.

Se infatti, come frequentemente accade, si utilizza per l'eccitatore il modello rappresentato in figura:

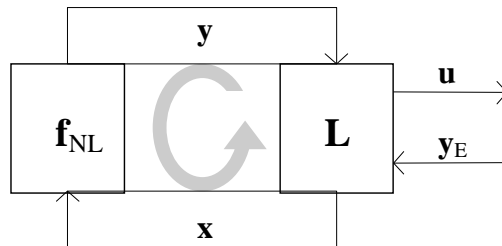


Fig. 6. Sistema eccitatore-risuonatore scomposto in parte dinamica lineare e parte non lineare istantanea.

si incontra un potenziale problema di non-computabilità *interna*, evidenziato dalla freccia in colore. In questa schematizzazione si suppone che il sistema di eccitazione sia modellabile attraverso la connessione retroazionata di una funzione non *lineare istantanea* \$[y\_1, \dots, y\_M] = f\_{NL}(x\_1, \dots, x\_N)\$ di \$N\$ ingressi e \$M\$ uscite e di un sistema *lineare dinamico* di \$M+P\$ ingressi e \$N+O\$ uscite. In questo schema, \$L\$ dà conto della dinamica propria degli elementi interni all'eccitatore ed è quindi ben esprimibile con equazioni differenziali lineari, mentre \$f\_{NL}\$ dà conto delle inevitabili non linearità presenti nello schema, come le condizioni di contatto, la presenza di relazioni non proporzionali tra variabili e così via.

Sotto particolari ipotesi, due metodi possono essere impiegati per la risoluzione dei problemi di non computabilità descritti sopra: il *Metodo di Kirchhoff (K)* e il *metodo Wave (W)*.



## 2. Il metodo K

Nel capitolo successivo si tratterà il metodo di Kirchhoff, abbreviato in “metodo K”. Il metodo sarà esposto illustrando separatamente l'applicazione alla parte lineare e alla parte non lineare del sistema. Per la parte lineare si farà esplicitamente riferimento alla *trasformazione bilineare* come tecnica di discretizzazione dei sistemi lineari continui, mentre la parte non lineare sarà trattata separatamente nei casi di funzione ad un ingresso e un'uscita (SISO), ingressi multipli e uscita singola (MISO) e ingressi e uscite multipli (MIMO).

### 2.1 Generalità sul metodo K

Il metodo K si basa sull'ipotesi che il grafo di partenza sia separabile in una parte dinamica lineare e in una funzione non lineare istantanea<sup>2</sup>.

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{L}(\mathbf{y}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{x}(t)) \end{cases} \quad (12)$$

Il sistema complessivo è rappresentato nello schema seguente, dove si è indicato con  $\mathbf{y}_E$  un'ulteriore e non specificata uscita verso il mondo esterno:

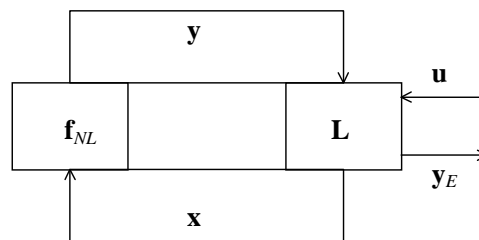


Fig. 7. Sistema eccitatore-risunatore scomposto in parte dinamica lineare e parte non lineare istantanea secondo le ipotesi del metodo K.

Il blocco L può essere pensato come un generico sistema lineare MIMO; gli ingressi/uscite potenzialmente interessati da problemi di non computabilità sono quelli che insistono sulla non linearità istantanea.

L'obiettivo del metodo è quello di evidenziare i percorsi privi di elementi di ritardo che sussistono tra ingresso e uscita del sistema lineare a cavallo della non linearità; il sistema riscritto per mezzo di tale tecnica viene quindi risolto attraverso metodi geometrici.

Più in dettaglio, se il sistema a tempo continuo di riferimento L viene discretizzato, ad esempio per mezzo della ben nota trasformazione bilineare:

$$s = h \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (13)$$

<sup>2</sup> Si osservi che l'ipotesi fatta è meno restrittiva di quanto non sembri; è infatti possibile dimostrare che la forma data incorpora il caso più generale del sistema dinamico nonlineare retroazionato su una non linearità istantanea. Si veda l'appendice A per una giustificazione dell'asserto.

dove si sceglie di norma  $h=2/T$ , si giunge ad un'espressione di aggiornamento dello stato a tempo discreto del tipo:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{K}\mathbf{y}(n) + \mathbf{p}(n) \tag{14}$$

dove si suppone che il sistema abbia  $M$  ingressi “interni” denominati  $y_1...y_M$ ,  $P$  ingressi “esterni” (imposti), denominati  $u_1...u_P$  e  $N$  uscite “interne” denominate  $x_1...x_N$ . Nella scrittura precedente si è messa in evidenza la dipendenza istantanea ingresso-uscita del sistema, che può essere meglio rappresentata nella figura seguente<sup>3</sup>:

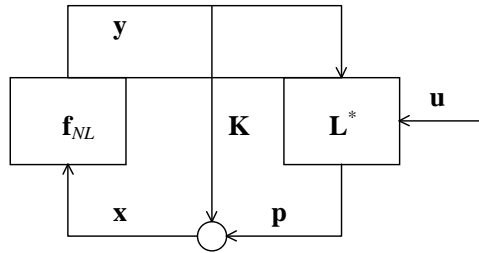


Fig. 8. evidenziazione della parte istantanea nello schema precedente: si osservi che, per costruzione, il sistema  $L^*$  non ha legame istantaneo tra uscita  $\mathbf{p}$  ed ingresso  $\mathbf{y}$ .

Se si indica con  $\mathbf{p}(n)$  l'uscita del sistema  $L^*$ , che risulta quindi composta soltanto da segnali noti per definizione ( $u_1...u_P$ ) e “passati”, ed è quindi identificabile come un *contributo storico*, si può scrivere:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(n) = \mathbf{L}^*(\mathbf{y}(n), \mathbf{u}(n)) \\ \mathbf{y}(n) = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{p}(n) + \mathbf{K}\mathbf{y}(n)) \end{cases} \tag{15}$$

Come si può notare, la non computabilità è ora confinata nella scrittura  $\mathbf{y} = \mathbf{f}_{NL}(\mathbf{p} + \mathbf{K}\mathbf{y})$ . L'esplicitabilità della forma scritta deve essere valutata sulla base del *teorema di Dini, o della funzione implicita*. Se la forma scritta definisce implicitamente una funzione vettoriale  $\mathbf{y} = \mathbf{g}_{NL}(\mathbf{p})$ , tale funzione viene calcolata e rappresenta la soluzione del problema di non computabilità, come riportato nella figura seguente:

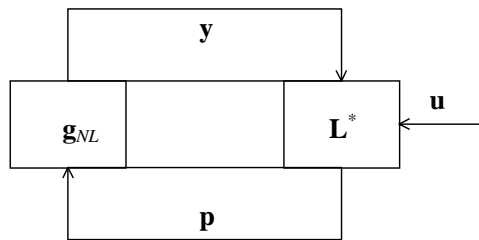


Fig. 9. Eliminazione della parte istantanea dello schema precedente per soluzione della forma implicita  $\mathbf{f}_{NL}$ . Si osservi che non ci sono più anelli non computabili nello schema.

Nello schema il sistema  $L^*$ , per costruzione, garantisce l'assenza di collegamento istantaneo tra ingressi e uscite interni. In conclusione, l'estrazione della parte istantanea da  $L$  e la esplicitazione di  $\mathbf{f}_{NL}$  consentono di arrivare ad uno schema numerico computabile.

<sup>3</sup> Di qui in poi si trascurerà l'uscita esterna  $y_E$ , in quanto non interessata da problemi di non computabilità.

## 2.2 Analisi del metodo K

### 2.2.1 Parte lineare

Nell'ipotesi detta, un sistema MIMO come descritto si può esprimere nella forma seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{w}' = \mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{y} \\ \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{y} \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (16)$$

Il cui schema è così rappresentato:

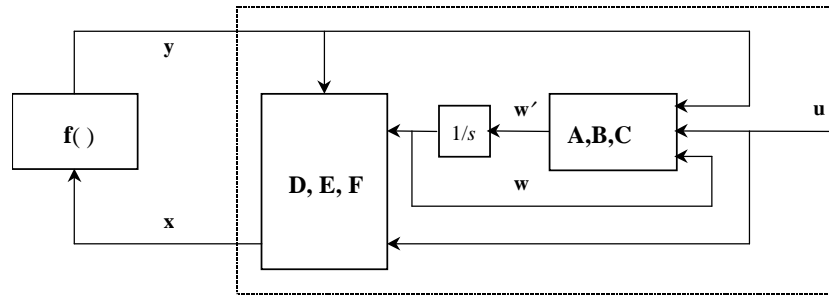


Fig. 10. Schema analogico del sistema (16).

Applicando la trasformazione bilineare alla trasformata di Laplace della prima equazione del sistema (16):

$$s\mathbf{W}(s) = \mathbf{A}\mathbf{W}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(s) \quad (17)$$

si ha:

$$h(1 - z^{-1})\mathbf{W}(z) = \mathbf{A}(1 + z^{-1})\mathbf{W}(z) + (1 + z^{-1})(\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z)) \quad (18)$$

$$h\mathbf{W}(z) - \mathbf{A}\mathbf{W}(z) = z^{-1}h\mathbf{W}(z) + z^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z) + z^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z)) \quad (19)$$

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{W}(z) = z^{-1}(h\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{W}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) + z^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(z) + \mathbf{C}\mathbf{Y}(z) + z^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y}(z) \quad (20)$$

ovvero, nel tempo:

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{w}(n) = (h\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n) + \mathbf{B}\mathbf{u}(n-1) + \mathbf{C}\mathbf{y}(n) + \mathbf{C}\mathbf{y}(n-1) \quad (21)$$

e quindi, se  $(h\mathbf{I} - \mathbf{A})$  è invertibile:

$$\mathbf{w}(n) = (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \left( (h\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{B}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{C}(\mathbf{y}(n) + \mathbf{y}(n-1)) \right) \quad (22)$$

Si osservi che la matrice  $(h\mathbf{I} - \mathbf{A})$  è invertibile per ogni valore di  $h$  per cui non sia  $\det(h\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ , ovvero per ogni scelta di  $h$  ad eccezione degli autovalori di  $\mathbf{A}$ .

Definendo:

$$\mathbf{G} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} \quad (23)$$

$$\mathbf{H} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (h\mathbf{I} + \mathbf{A}) \quad (24)$$

$$\mathbf{J} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(n) \equiv \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \quad (26)$$

ci si riconduce alla forma:

$$\mathbf{w}(n) = \mathbf{G}\mathbf{y}(n) + \hat{\mathbf{p}}(n) \quad (27)$$

dove per  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  e  $\hat{\mathbf{p}}(n)$  sono date le forme esplicite valide per i sistemi MIMO nelle ipotesi viste.

Sostituendo ora nella seconda di (16), si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n) &= \mathbf{D}\mathbf{G}\mathbf{y}(n) + \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}(n) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) + \mathbf{F}\mathbf{y}(n) \\ &= \mathbf{K}\mathbf{y}(n) + \mathbf{p}(n) \end{aligned} \quad (28)$$

dove:

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{D}\mathbf{G} + \mathbf{F} \quad (29)$$

$$\mathbf{p}(n) \equiv \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}(n) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) = \mathbf{D}(\mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1)) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) \quad (30)$$

In conclusione il sistema diventa:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(n) = \mathbf{D}\mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{D}\mathbf{J}\mathbf{u}(n-1) + \mathbf{D}\mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) + (\mathbf{D}\mathbf{J} + \mathbf{E})\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{p}(n) + \mathbf{K}\mathbf{y}(n)) \\ \mathbf{w}(n) = \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}(\mathbf{y}(n) + \mathbf{y}(n-1)) \end{cases} \quad (31)$$

Ed è quindi posto nella forma richiesta per la soluzione.

Vale la pena di osservare che le equazioni scritte presuppongono l'impiego del metodo della trasformazione bilineare per la discretizzazione del sistema lineare  $L$ ; tuttavia il metodo  $K$  nella sua forma più generale si può applicare con qualsiasi forma di discretizzazione; in altri casi, ovviamente, cambieranno le definizioni di  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  ed  $\mathbf{p}(n)$ .

## 2. 2.2 Parte non lineare

Come si è detto, l'esplicitabilità della forma vettoriale ad  $N$  ingressi ed  $M$  uscite:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{p} + \mathbf{K}\mathbf{y}) \quad (32)$$

rappresenta la soluzione del problema di non computabilità ed è subordinata all'applicazione del teorema di Dini. Per comodità e chiarezza richiameremo il teorema nei tre casi di interesse principale: funzioni di  $R \rightarrow R$  (sistemi SISO), di  $R^N \rightarrow R$  (sistemi MISO) e di  $R^N \rightarrow R^M$  (sistemi MIMO)

### 2. 2.2.1 Sistemi SISO

Per i sistemi SISO vale il teorema di Dini nella sua formulazione più semplice. Quest'ultimo afferma che, data una funzione implicita:

$$f(x, y) = 0 \quad (33)$$

se è possibile determinare un punto  $P_0=(x_0, y_0)$  per cui è:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \neq 0 \quad (34)$$

allora esiste un'unica funzione  $g(x)$  tale per cui:

$$f(x, g(x)) = 0 \quad (35)$$

in un intorno del punto  $P_0$ . Nel nostro caso, per  $N=M=1$  si ha:

$$f_{NL}(p + ky) - y = 0 \quad (36)$$

dove con  $k$  si è indicato l'unico elemento della matrice  $1 \times 1$   $\mathbf{K}$ . La condizione di esplicitabilità diventa quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_{NL}(p + ky)k - 1 \neq 0 \quad (37)$$

cioè in definitiva:

$$f'_{NL}(p + ky) = f'_{NL}(x) \neq \frac{1}{k} \quad (38)$$

Pertanto, se la derivata di  $f_{NL}$  è diversa da  $1/k$  in un punto, la funzione è localmente esplicitabile; è facile rendersi conto inoltre che se essa è diversa da  $1/k$  per qualunque  $x$ ,  $f_{NL}$  è globalmente esplicitabile.

Come anticipato, la funzione  $g_{NL}$  può essere calcolata a partire dalla  $f_{NL}$  in base a considerazioni geometriche. Si osserva infatti che la trasformazione:

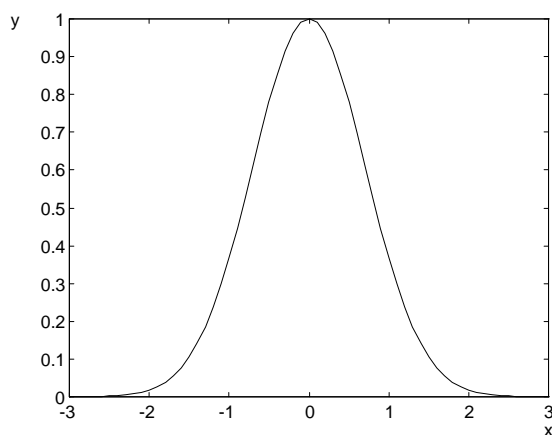
$$\begin{cases} y_s = y \\ p = x - ky \end{cases} \quad (39)$$

cui è sottoposta la  $f_{NL}$ , mappa il piano  $(x, y)$  nel piano  $(p, y_s)$  secondo una trasformazione di tipo *shear*<sup>4</sup>.

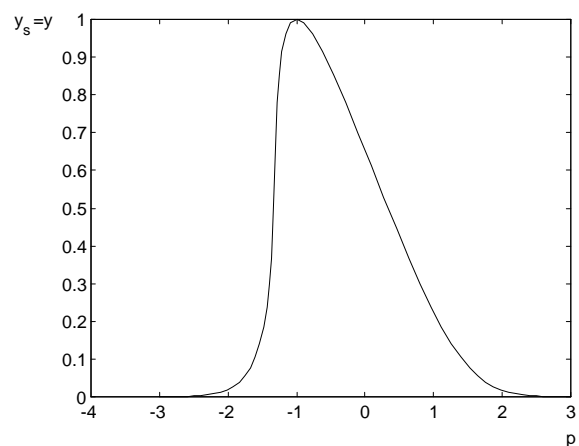
Nelle figure seguenti si vede l'effetto della trasformazione descritta, con  $k=1$ , sulla funzione:

$$y = e^{-x^2} \quad (40)$$

Si può notare come la funzione si “sdrai a sinistra” (a destra, per  $k$  negativi). Si può altresì notare che, essendo la derivata di questa funzione minore di  $1/k=1$  per ogni  $x$ , si è in presenza di esplicitabilità globale.



Funzione nel piano  $(x, y)$



Funzione nel piano  $(p, y)$

Fig. 11. Rappresentazione grafica della trasformazione di *shear* nel caso bidimensionale

<sup>4</sup> Il termine inglese *shear* significa “scorrimento” e sottintende una deformazione del piano cartesiano in cui l’asse delle ordinate viene ruotato con perno sull’origine e scalato. Intuitivamente, tutto va come se il piano venisse affettato in strisce orizzontali di altezza infinitesima e tali strisce venissero poi fatte scorrere in modo da mantenere rettilinee le linee verticali. Questa trasformazione muta, ad esempio, rettangoli in parallelogrammi.

### 2.2.2.2 Sistemi MISO

Per i sistemi MISO vale ancora il teorema di Dini nella formulazione estesa. Quest'ultimo afferma che, data una funzione implicita:

$$f(x_1, \dots, x_N, y) = 0 \quad (41)$$

se è possibile determinare un punto  $\mathbf{P}_0 = (x_1, \dots, x_N, y)$  per cui:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(\mathbf{P}_0)} \neq 0 \quad (42)$$

allora esiste un'unica funzione  $g(x_1, \dots, x_N)$  tale per cui:

$$f(x_1, \dots, x_N, g(x_1, \dots, x_N)) = 0 \quad (43)$$

in un intorno del punto  $\mathbf{P}_0$ . Nel nostro caso si ha:

$$f_{NL}(\mathbf{p} + \mathbf{k}y) - y = f_{NL}(p_1 + k_1 y, \dots, p_N + k_N y) - y = 0 \quad (44)$$

dove con  $\mathbf{k}$  si è indicato la matrice  $\mathbf{K}$  costituita da una sola colonna ( $N \times 1$ ). La condizione di esplicitabilità diventa quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_{NL}(p_1 + k_1 y, \dots, p_N + k_N y) - y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y} \right) \neq 0 \quad (45)$$

cioè:

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_{NL}(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} k_i \right) \neq 1 \quad (46)$$

e quindi, in definitiva:

$$\text{grad}(f_{NL})^T \cdot \mathbf{k} \neq 1 \quad (47)$$

Pertanto, se il prodotto interno del gradiente di  $f_{NL}$  con  $\mathbf{k}$  è diverso da 1 in un punto  $P_0$ , la funzione è localmente esplicitabile; è facile rendersi conto inoltre che se esso è diverso da 1 per qualunque  $P$ ,  $f_{NL}$  è globalmente esplicitabile.

Anche in questo caso la trasformazione geometrica indotta dalla relazione:

$$\begin{cases} x_1(n) = k_1 y(n) + p_1(n) \\ x_2(n) = k_2 y(n) + p_2(n) \\ \dots \\ x_N(n) = k_N y(n) + p_N(n) \end{cases} \quad (48)$$

definisce una trasformazione di *shear* multidimensionale. Tale trasformazione può essere rappresentata in forma matriciale per mezzo della:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{k}_{N \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & k_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_N \\ y \end{pmatrix} \quad (49)$$

Come si può notare, la matrice  $\mathbf{T}$ , la cui inversa esiste e vale:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -k_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -k_N \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N \times N} & -\mathbf{k}_{N \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & 1_{1 \times 1} \end{pmatrix} \quad (50)$$

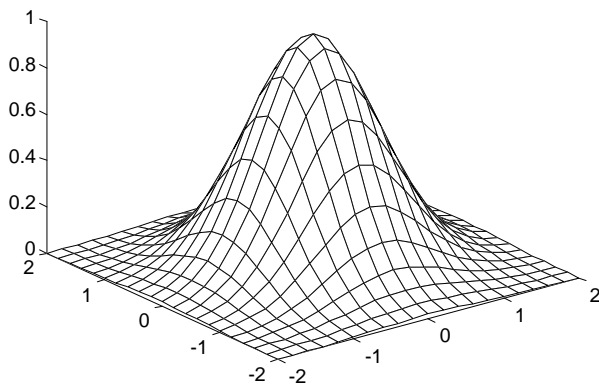
definisce una trasformazione di *shear* nello spazio  $(x_1, x_2, \dots, x_N, y)$ , mutandolo nello spazio  $(p_1, p_2, \dots, p_N, y)$ ; le equazioni degli assi originali nello spazio trasformato si ricavano facilmente dalla trasformazione di cui sopra, sostituendo alla  $N+1$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_N, y)$  gli  $N+1$  versori ortogonali costituenti la base canonica.

Gli assi delle ascisse così risultanti sono altrettante rette sovrapposte agli assi dello spazio trasformato, mentre l'asse  $y$  subisce una inclinazione di un coefficiente angolare  $-k_i$  per ogni direzione dello spazio risultante.

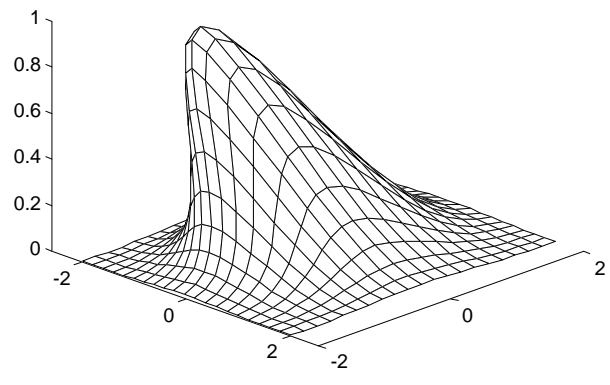
Nelle figure seguenti si vede l'effetto della trasformazione descritta, con  $\mathbf{k}=[1, 1]$ , sulla funzione:

$$y = e^{-(x_1^2 + x_2^2)} \quad (51)$$

Si può notare dal grafico che la funzione non è esplicitabile. Si lascia come esercizio verificare che il prodotto del gradiente di  $f$  per  $\mathbf{k}$  è uguale a 1 in un insieme di punti del piano  $\mathbf{x}$ .



Funzione nel piano  $(\mathbf{x}, y)$



Funzione nel piano  $(\mathbf{p}, y)$

Fig. 12. Rappresentazione grafica della trasformazione di *shear* nel caso tridimensionale

### 2.2.2.3 Sistemi MIMO

Per i sistemi MIMO vale il teorema di Dini nella formulazione generalizzata. Quest'ultimo afferma che, dato un vettore di funzioni implicite:

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) \\ \dots \\ f_M(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M) \end{vmatrix} \quad (52)$$

se è possibile determinare un punto  $\mathbf{P}_0=(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_M)$  in cui esse si annullano tutte e vale:

$$\left. \frac{\partial(f_1, \dots, f_M)}{\partial(y_1, \dots, y_M)} \right|_{(\mathbf{P}_0)} \neq 0 \quad (53)$$

allora esistono e sono univocamente determinate le funzioni  $g_1(x_1, \dots, x_N), \dots, g_M(x_1, \dots, x_N)$  tali per cui:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_N, g_1(x_1, \dots, x_N)) &= 0 \\ \dots & \\ f_M(x_1, \dots, x_N, g_M(x_1, \dots, x_N)) &= 0 \end{aligned} \quad (54)$$

in un intorno del punto  $P_0$ . Si ricorda che la forma che compare nella (53) si dice *determinante jacobiano* (o più semplicemente *jacobiano*) delle funzioni  $f_i$  rispetto alle variabili  $y_1, \dots, y_M$ , ed è:

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_M)}{\partial(y_1, \dots, y_M)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_M}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial y_M} \end{vmatrix} \quad (55)$$

Nel nostro caso lo jacobiano vale:

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_M}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_M}{\partial y_M} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NL1}}{\partial x_i} k_{i1} - 1 & \dots & \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NL1}}{\partial x_i} k_{iM} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NLM}}{\partial x_i} k_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NLM}}{\partial x_i} k_{iM} - 1 \end{vmatrix} \quad (56)$$

Riscrivendo:

$$\begin{aligned} \det \left\{ \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NL1}}{\partial x_i} k_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NL1}}{\partial x_i} k_{iM} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NLM}}{\partial x_i} k_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_{NLM}}{\partial x_i} k_{iM} \end{vmatrix} - \mathbf{I} \right\} = \\ = \det \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial f_{NL1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{NL1}}{\partial x_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{NLM}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{NLM}}{\partial x_N} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1M} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & \dots & k_{NM} \end{vmatrix} - \mathbf{I} \right\} \neq 0 \end{aligned} \quad (57)$$

e quindi, in definitiva:



$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{f}_{NL}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{K} - \mathbf{I}\right) \neq 0 \quad (58)$$

Pertanto, se la matrice definita dalla (58) nel punto  $\mathbf{P}_0$  non è singolare, la funzione è localmente esplicitabile; è facile rendersi conto inoltre che se la (58) vale per qualunque  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{N+M}$ ,  $\mathbf{f}_{NL}$  è globalmente esplicitabile.

Anche in questo caso la trasformazione geometrica indotta dalla relazione:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{K}\mathbf{y}(n) + \mathbf{p}(n) \quad (59)$$

definisce una trasformazione di *shear* multidimensionale. Tale trasformazione può essere rappresentata in forma matriciale per mezzo della:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N \times N} & \mathbf{K}_{N \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{I}_{M \times M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \quad (60)$$

ovvia estensione della formula del caso MISO. Come si può notare, la matrice  $\mathbf{T}$ , la cui inversa esiste e vale:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{N \times N} & -\mathbf{K}_{N \times M} \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{I}_{M \times M} \end{pmatrix} \quad (61)$$

definisce una trasformazione di *shear* nello spazio  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , mutandolo nello spazio  $(\mathbf{p}, \mathbf{y})$ ; le equazioni degli assi originali nello spazio trasformato si ricavano facilmente dalla trasformazione di cui sopra, sostituendo alla N+M-upla  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  gli N+M versori ortogonali costituenti la base canonica.

## 2.3 Soluzione numerica con il metodo K

### 2.3.1 Schema di soluzione

Il sistema risolto con il metodo K si presenta quindi nella forma numerica:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(n) = \mathbf{D}(\mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1)) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{p}(n)) \\ \mathbf{w}(n) = \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}(\mathbf{y}(n) + \mathbf{y}(n-1)) \end{cases} \quad (62)$$

con le definizioni dette per  $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{J}, \mathbf{p}$ , che può essere calcolato iterando le equazioni scritte nell'ordine dato.

Ovviamente, la prima e la terza di (62) presentano numerosi fattori in comune. È quindi più efficiente attuare uno schema di calcolo per mezzo della variabile intermedia  $\hat{\mathbf{p}}$ , scrivendo:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \\ \mathbf{p}(n) = \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}(n) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{p}(n)) \\ \mathbf{w}(n) = \mathbf{G}\mathbf{y}(n) + \hat{\mathbf{p}}(n) \end{cases} \quad (63)$$

Con riferimento a quest'ultimo sistema, si può ancora osservare che, se il vettore di stato della parte lineare del sistema  $\mathbf{w}$  non servisse ai fini del calcolo delle uscite verso il mondo esterno, sostituendo la quarta di (63) nella prima, sarebbe anche possibile porre il sistema nella forma seguente:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{H}\hat{\mathbf{p}}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + (\mathbf{H} + \mathbf{I})\mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \\ \mathbf{p}(n) = \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}(n) + \mathbf{E}\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{p}(n)) \end{cases} \quad (64)$$

forma che si presenta non di rado nei casi pratici.

Nei casi più complessi, tuttavia, le uscite verso il mondo esterno possono richiedere non soltanto la conoscenza di  $\mathbf{w}$ , ma anche quella del vettore delle “uscite interne”  $\mathbf{x}$ . Pertanto, accanto alle equazioni (62) o (63) è spesso necessaria anche la:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{p}(n) + \mathbf{K}\mathbf{y}(n) \quad (65)$$

### 2.3.2 Alcune osservazioni pratiche

Occorre osservare che nella trattazione svolta fino ad ora è stata considerata la forma più generale di sistema dinamico non lineare affrontabile con il metodo K. Va tuttavia sottolineato che nei casi pratici la struttura dei sistemi che si incontrano può consentire alcune significative semplificazioni.

In primo luogo, molti sistemi di equazioni si possono ricondurre alla forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{y} \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (66)$$

In questo caso, si vede che  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$ , e  $\mathbf{F}$  sono nulle. Pertanto,  $\mathbf{K}$  coincide con  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{p}(n)$  coincide con  $\hat{\mathbf{p}}(n)$ :

$$\mathbf{K} = \mathbf{G} \equiv (\mathbf{h}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} \quad (67)$$

$$\mathbf{p}(n) = \hat{\mathbf{p}}(n) \equiv \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \quad (68)$$

mentre le definizioni di  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{J}$  rimangono invariate. In questo caso, le equazioni (62) divengono:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(n) = \mathbf{H}\mathbf{x}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{K}\mathbf{y}(n-1) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{p}(n)) \\ \mathbf{x}(n) = \mathbf{G}\mathbf{y}(n) + \mathbf{p}(n) \end{cases} \quad (69)$$

Inoltre, nei casi in cui la conoscenza del vettore  $\mathbf{x}$  non occorre al calcolo di eventuali uscite verso il mondo esterno, la forma si semplifica ulteriormente in:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(n) = \mathbf{H}\mathbf{s}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + (\mathbf{I} + \mathbf{H})\mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \\ \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{p}(n)) \end{cases} \quad (70)$$

In secondo luogo, molti sistemi di dimensione  $N$  “grande” insistono su funzioni MISO con dominio di dimensioni più piccole di  $N$ ; è frequente il caso di funzioni di  $R^2 \rightarrow R$  o  $R^3 \rightarrow R$ .

Infine, se in luogo della trasformazione bilineare si utilizza la tecnica delle differenze all’indietro, le definizioni di  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{p}(n)$  sono ulteriormente semplificate, come si può facilmente verificare.

## 2.4 Esempi

Nei paragrafi successivi si esporranno alcuni esempi di applicazione del metodo K fino ad ora trattato. Saranno presentati esempi classici della teoria dei circuiti non lineari, come l’oscillatore di Chua-Felderhoff, esempi di meccanismi elementari di eccitazione, come il sistema martelletto-corda o ancia-tubo acustico e esempi di equazioni differenziali non lineari come l’equazione di Van der Pol.

## 2. 4.1 Oscillatore di Chua-Felderhoff

Il circuito di Chua-Felderhoff, descritto ad esempio in [1], è così schematizzato:

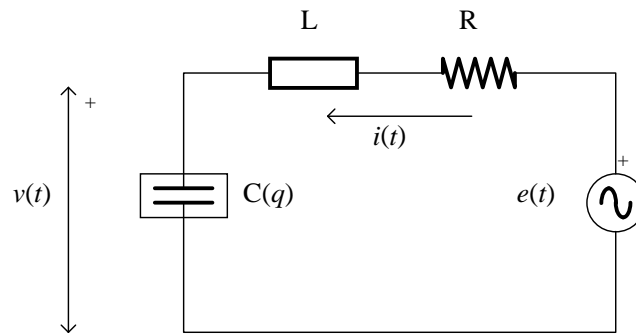


Fig. 13. Schema elettrico del circuito di Chua-Felderhoff

In questo schema si ha:  $L=100\mu\text{H}$ ,  $R=180\Omega$ ,  $e(t) = e_0 \sin(2\pi f_0 t)$ . I componenti L e R sono lineari, mentre il componente C è una capacità non lineare la cui caratteristica tensione-carica è:

$$q(v) = C_0 \frac{v}{\sqrt{1 + \frac{v}{v_0}}} \quad (71)$$

definita per  $v > v_0$ . Nell'esempio,  $C_0=80\text{pF}$  e  $v_0=0.6\text{V}$ . La curva  $q(v)$  per tali valori è riportata nella figura seguente:

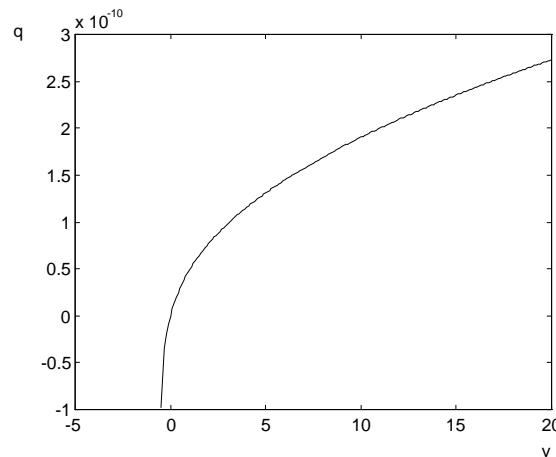


Fig. 14. Caratteristica tensione-carica per il condensatore non lineare.  $C_0=80\text{pF}$ ,  $v_0=0.6\text{V}$ .

Il circuito proposto ha un comportamento caotico: al variare della tensione di picco del generatore  $e_0$  l'andamento della carica  $q(t)$  a regime manifesta i fenomeni tipici del caos, come il raddoppio del periodo, descrivibili nei classici diagrammi di biforcazione.

L'equazione analogica della parte lineare del sistema può essere scritta applicando le leggi di Kirchhoff al circuito; il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{cases} q' = i \\ i' = -\frac{R}{L}i + \frac{1}{L}e - \frac{1}{L}v \\ v = f(q) \end{cases} \quad (72)$$

Il sistema è non lineare e ha dimensione dello spazio di stato pari a 2. L'ingresso esterno è  $e$ , la funzione non lineare<sup>5</sup> è da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ : siamo quindi nel caso SISO. La forma matriciale del sistema è la seguente:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -R/L \end{vmatrix} q + \begin{vmatrix} 0 \\ 1/L \end{vmatrix} e + \begin{vmatrix} 0 \\ -1/L \end{vmatrix} v \\ v = f(q) \end{cases} \quad (73)$$

ovvero, nella simbologia del metodo K:

$$\begin{cases} \mathbf{w}' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -R/L \end{vmatrix} \mathbf{w} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1/L \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} 0 \\ -1/L \end{vmatrix} v \\ x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{w} \\ v = f(q) \end{cases} \quad (74)$$

in cui si nota che le matrici  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{F}$  sono nulle. Occorre ora determinare  $\mathbf{p}(n)$ , e  $\mathbf{K}$ . Come spiegato sopra, conviene procedere al calcolo di  $\mathbf{p}$  utilizzando la variabile intermedia  $\hat{\mathbf{p}}$ . Si ha per definizione:

$$\hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \quad \mathbf{p}(n) = \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}(n) \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{G} \quad (75)$$

Procedendo con i calcoli si trova:

$$(h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & 1 \\ 0 & h - R/L \end{vmatrix}; \quad (h\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & -1 \\ 0 & h + R/L \end{vmatrix} \quad (76)$$

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h & h R + hL \\ 0 & 1 \\ & R + hL \end{vmatrix}; \quad \mathbf{G} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h R + hL \\ 1 \\ -R + hL \end{vmatrix} \quad (77)$$

$$\mathbf{H} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 2L \\ Lh + R & Lh - R \\ 0 & LH + R \end{vmatrix} \quad \mathbf{J} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h R + hL \\ 1 \\ R + hL \end{vmatrix} \quad (78)$$

Quindi:

$$\hat{\mathbf{p}}(n) = \begin{vmatrix} 1 & 2L \\ Lh + R & Lh - R \\ 0 & Lh + R \end{vmatrix} \mathbf{w}(n-1) + \frac{1}{Lh + R} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} (e(n) + e(n-1) - v(n-1)) \quad (79)$$

$$\mathbf{p}(n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{p}}(n) \quad (80)$$

<sup>5</sup> Per convenienza, nello schema si è introdotta l'inversa della funzione data in (71), la cui espressione analitica è facilmente determinabile.

$$\mathbf{K} = k = \frac{1}{h} \frac{1}{R+hL} \quad (81)$$

Il sistema di equazioni a tempo discreto complessivo è quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_1(n) = q(n-1) + \frac{2L}{Lh+R} i(n-1) + \frac{1}{h} \frac{1}{Lh+R} (e(n) + e(n-1) - v(n-1)) \\ \hat{p}_2(n) = \frac{Lh-R}{Lh+R} i(n-1) + \frac{1}{Lh+R} (e(n) + e(n-1) - v(n-1)) \\ p(n) = \hat{p}_1(n) \\ v(n) = g(p(n)) \\ q(n) = \hat{p}_1(n) - \frac{1}{h} \frac{1}{Lh+R} v(n) \\ i(n) = \hat{p}_2(n) - \frac{1}{Lh+R} v(n) \end{array} \right. \quad (82)$$

La funzione  $g$  si determina effettuando lo *shear* dell'inversa della funzione di figura 14.; lo *shear* è effettuato di una quantità  $k$  che con i parametri del sistema corrisponde ad un coefficiente angolare di circa  $7.5856 \cdot 10^{-13}$ .

Una volta determinata  $g$ , ad esempio tabulando i valori ottenuti dalla trasformazione lineare delle coppie  $(q, v)$  calcolate per mezzo della (71), il sistema può essere risolto semplicemente iterando la soluzione delle equazioni nell'ordine scritto.

Nelle figure seguenti si riportano i diagrammi di fase del sistema nel transitorio iniziale e a regime. Nella simulazione, oltre ai parametri riportati sopra, si sono adottati i seguenti valori:  $e_0=3.57V$ ,  $F_c=32f_0$ .  $f_0$  è dato da:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC_0}} \quad (83)$$

e quindi è circa pari a 1.78 Mhz.

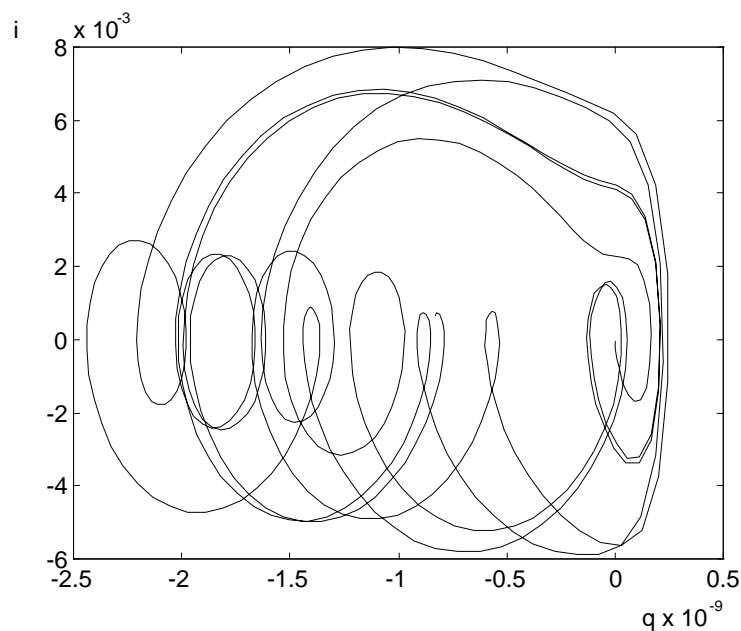


Fig 15. Diagramma di fase carica-corrente del circuito nel transitorio

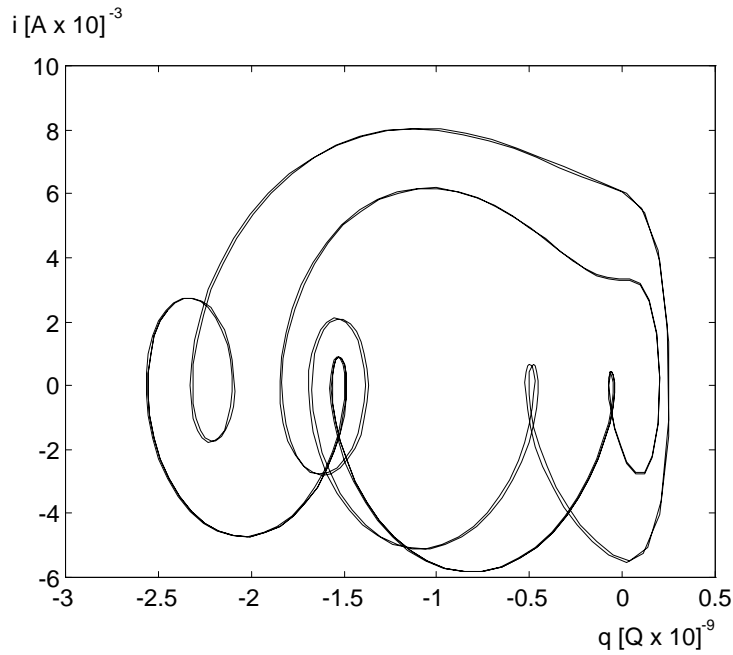


Fig. 16. Diagramma di fase carica-corrente del circuito dopo 256 periodi (a regime).

Si confrontino questi grafici con quelli riportati in [1].

### 2. 4.2 Sistema dinamico martelletto-corda

#### 2. 4.2.1 Caso perfettamente elastico

Un sistema dinamico martelletto corda perfettamente elastico [7, 8] si può schematizzare come un corpo dotato di massa e di elasticità non lineare in moto verso un mezzo che soddisfa (in prima approssimazione) l'equazione d'onda unidimensionale. Senza entrare nei dettagli, lo schema è il seguente:

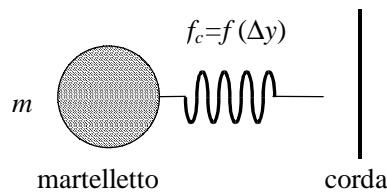


Fig. 17. Schema meccanico del martelletto perfettamente elastico

Nel caso di corde sufficientemente ideali, il modello di risonatore può essere realizzato mediante guide d'onda. In questo caso, l'accoppiamento tra eccitatore e risonatore durante la fase di contatto è dato da una giunzione serie, come è facile verificare.

Dalle equazioni della dinamica del martelletto e dalle relazioni esistenti tra le onde che si propagano sulla corda al punto di contatto, con riferimento alla (5) di pag. 6 il sistema risultante è il seguente:

$$\begin{cases} \Delta y' = v_m - \frac{1}{2Z} f - v_i \\ v_m' = -\frac{1}{m} f \\ f = K(\Delta y)^\alpha 1(\Delta y) \end{cases} \quad (84)$$

dove  $\Delta y$  è la differenza tra la posizione della corda e il “baricentro del martelletto” al punto di contatto e coincide con la compressione del feltro,  $v_m$  è la velocità del martelletto,  $v_i$  è la velocità entrante in giunzione,  $f$  è la forza di interazione tra corda e feltro e  $K$  e  $\alpha$  sono opportuni coefficienti. Il sistema è non lineare e ha dimensione dello spazio di stato pari a 2. L'ingresso esterno è  $v_i$ , la funzione non lineare è da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ : siamo quindi ancora una volta nel caso SISO. La forma matriciale del sistema, con la simbologia abituale, è:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{vmatrix} \Delta y \\ v_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta y \\ v_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} v_i + \begin{vmatrix} -\frac{1}{2Z} \\ -\frac{1}{m} \end{vmatrix} y \\ y = f(\Delta y) \end{cases} \quad (85)$$

mentre nella simbologia del metodo  $\mathbf{K}$  si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{w}' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{w} + \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} -1/2Z \\ -1/m \end{vmatrix} y \\ x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{w} \\ y = f(x) \end{cases} \quad (86)$$

e anche in questo caso le matrici  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{F}$  sono nulle. Occorre ora determinare  $\mathbf{p}(n)$  e  $\mathbf{K}$ . Come nel caso precedente conviene procedere al calcolo di  $\mathbf{p}$  utilizzando la variabile intermedia  $\hat{\mathbf{p}}$ . Si ha per definizione:

$$\hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(u(n) + u(n-1)) + \mathbf{G}y(n-1) \quad \mathbf{p}(n) = \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}(n) \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{G} \quad (87)$$

Procedendo nei calcoli si trova:

$$(h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & 1 \\ 0 & h \end{vmatrix}; \quad (h\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & -1 \\ 0 & h \end{vmatrix} \quad (88)$$

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \frac{1}{h} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{G} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{h} \left( \frac{1}{2Z} + \frac{1}{mh} \right) \\ -\frac{1}{mh} \end{vmatrix} \quad (89)$$

$$\mathbf{H} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{h} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{J} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{h} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (90)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(n) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{h} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{w}(n-1) + \begin{vmatrix} -\frac{1}{h} \\ 0 \end{vmatrix} (u(n) + u(n-1)) + \begin{vmatrix} \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2Z} + \frac{1}{mh} \right) \\ -\frac{1}{mh} \end{vmatrix} y(n-1) \quad (91)$$

$$\mathbf{p}(n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{p}}(n) \quad (92)$$

$$\mathbf{K} = k = -\frac{1}{h} \left( \frac{1}{2Z} + \frac{1}{mh} \right) \quad (93)$$

Il sistema di equazioni a tempo discreto complessivo è quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_1(n) = \Delta y(n-1) + \frac{2}{h} v_m(n-1) - \frac{v_i(n) + v_i(n-1)}{h} - \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2Z} + \frac{1}{mh} \right) f(n-1) \\ \hat{p}_2(n) = v_m(n-1) - \frac{1}{mh} f(n-1) \\ p(n) = \hat{p}_1(n) \\ f(n) = g(p(n)) \\ \Delta y(n) = \hat{p}_1(n) - \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2Z} + \frac{1}{mh} \right) f(n) \\ v_m(n) = \hat{p}_2(n) - \frac{1}{mh} f(n) \end{array} \right. \quad (94)$$

La funzione  $g$  si determina effettuando lo *shear* della funzione non lineare in (84); lo shear è effettuato di una quantità  $k$  che con parametri tipici del sistema corrisponde ad un coefficiente angolare di circa -0.5.

#### 2.4.2.2 Caso del feltro dissipativo

Un sistema dinamico martelletto corda con feltro dissipativo si può schematizzare nel caso precedente, ove si ponga in parallelo (meccanico) alla molla un elemento di attrito, come nello schema seguente:

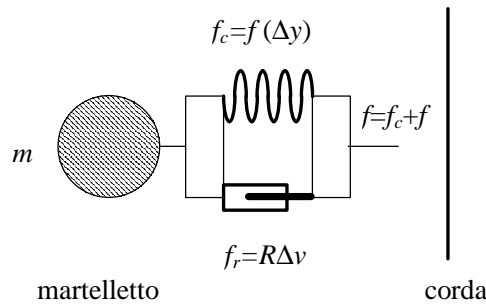


Fig 18. Schema meccanico del martelletto con feltro dissipativo

Dalle equazioni della dinamica del martelletto e dalle relazioni esistenti tra le onde che si propagano sulla corda al punto di contatto, *durante il contatto* il sistema risultante è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y' = \frac{2Z}{R+2Z} v_m - \frac{1}{R+2Z} f_c - \frac{2Z}{R+2Z} v_i \\ v_m' = -\frac{2RZ}{m(R+2Z)} v_m + \frac{2RZ}{m(R+2Z)} v_i - \frac{2Z}{m(R+2Z)} f_c \\ f_c = K(\Delta y)^\alpha \end{array} \right. \quad (95)$$

Il sistema è non lineare e ha dimensione dello spazio di stato pari a 2. L'ingresso esterno è  $v_i$ , la funzione non lineare è da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ : siamo quindi ancora una volta nel caso SISO. La forma matriciale del sistema, con la simbologia abituale, è la seguente:



$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left| \Delta y \right| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2Z}{R+2Z} \\ 0 & -\frac{2RZ}{m(R+2Z)} \end{vmatrix} \left| \Delta y \right| + \begin{vmatrix} -\frac{2Z}{R+2Z} \\ \frac{2RZ}{m(R+2Z)} \end{vmatrix} v_i + \begin{vmatrix} -\frac{1}{R+2Z} \\ \frac{2Z}{m(R+2Z)} \end{vmatrix} f_c \\ f_c = f(\Delta y) \end{cases} \quad (96)$$

e per la forma prevista dal metodo K si ha la situazione descritta nel caso perfettamente elastico. Occorre ora determinare  $\mathbf{p}(n)$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{H}$  ed  $\mathbf{J}$ . Dal momento che il calcolo è piuttosto laborioso, si procede in forma simbolica ponendo:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & a_4 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -a_2 \\ -a_4 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} -a_2 \\ \frac{2Z}{a_4} \\ R \end{vmatrix}; \quad (97)$$

Si ha quindi:

$$(h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & a_2 \\ 0 & h + a_4 \end{vmatrix}; \quad (h\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & -a_2 \\ 0 & h - a_4 \end{vmatrix} \quad (98)$$

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{h} & \frac{a_2}{h(h-a_4)} \\ 0 & \frac{1}{h-a_4} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{G} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \frac{-hRa_2 + a_1a_2(R+2Z)}{2hRZ(R+2Z)} \\ \frac{a_4}{R(h-a_4)} \end{vmatrix} \quad (99)$$

$$\mathbf{H} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} (h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2a_2}{h-a_4} \\ 0 & \frac{h+a_4}{h-a_4} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{J} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} -\frac{a_2}{h-a_4} \\ \frac{a_4}{h-a_4} \end{vmatrix} \quad (100)$$

Sostituendo ad  $a_2$  e  $a_4$  si trova:

$$g_1 = -\frac{mh+2Z}{h(mh(R+2Z)+2RZ)} \quad [\text{s}^2/\text{Kg}]; \quad g_2 = -\frac{2Z}{mh(R+2Z)+2RZ} \quad [\text{s}/\text{Kg}] \quad (101)$$

$$h_1 = 1 \quad [\text{adim}]; \quad h_2 = \frac{4Zm}{mh(R+2Z)+2RZ} \quad [\text{s}] \quad (102)$$

$$h_3 = 0 \quad [1/\text{s}]; \quad h_4 = \frac{mh(R+2Z)-2RZ}{mh(R+2Z)+2RZ} \quad [\text{adim}] \quad (103)$$

$$j_1 = \frac{2Zm}{mh(R+2Z)+2RZ} \quad [\text{s}]; \quad j_2 = \frac{2RZ}{mh(R+2Z)+2RZ} \quad [\text{adim}] \quad (104)$$

Il sistema di equazioni a tempo discreto complessivo è quindi:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\hat{p}_1(n) = \Delta y(n-1) \frac{4Zm}{hm(R+2Z)+2RZ} v_m(n-1) + \frac{2Zm}{hm(R+2Z)+2RZ} (v_i(n) + v_i(n-1)) - \\
\quad - \frac{2Z}{hm(R+2Z)+2RZ} f_c(n-1) \\
\hat{p}_2(n) = \frac{hm(R+2Z)-2RZ}{hm(R+2Z)+2RZ} v_m(n-1) + \frac{2RZ}{hm(R+2Z)+2RZ} (v_i(n) + v_i(n-1)) - \\
\quad - \frac{2Z}{hm(R+2Z)+2RZ} f_c(n-1) \\
p(n) = \hat{p}_1(n) \\
f_c(n) = g(p(n)) \\
\Delta y(n) = \hat{p}_1(n) - \frac{1}{h} \frac{mh+2Z}{(mh(R+2Z)+2RZ)} f_c(n) \\
v_m(n) = \hat{p}_2(n) - \frac{2Z}{(mh(R+2Z)+2RZ)} f_c(n)
\end{array} \right. \quad (105)$$

Il lettore è invitato a verificare che per  $R=0$  si ritrova il sistema scritto nel caso perfettamente elastico. La funzione  $g$  si determina effettuando lo *shear* della funzione non lineare, come nel caso precedente. Lo *shear* è effettuato di una quantità  $k$  che con parametri tipici del sistema corrisponde ad un coefficiente angolare tra -1 e -0.1.

### 2.4.3 Sistema “double scroll”

Nel sistema “double scroll” [10] sono assegnate direttamente le equazioni in forma di variabili di stato:

$$\left\{ \begin{array}{l}
x'_1 = \alpha(x_2 - h(x)) \\
x'_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\
x'_3 = -\beta x_2 \\
h(x_1) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} [|x_1 + 1| - |x_1 - 1|]
\end{array} \right. \quad (106)$$

Il sistema è non lineare e ha dimensione dello spazio di stato pari a 3. Il sistema è autonomo (non vi sono ingressi esterni), la funzione non lineare è da  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}$ : siamo quindi ancora una volta nel caso SISO. La forma matriciale del sistema, con la simbologia abituale, è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathbf{w}' = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{vmatrix} \mathbf{w} + \begin{vmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} y \\
x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{w} \\
y = f(x)
\end{array} \right. \quad (107)$$

Si nota quindi che in questo caso le matrici  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{F}$  sono nulle. Come sopra, si determinano  $\mathbf{p}(n)$  e  $\mathbf{K}$ ; si ha:

$$\hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{J}(\mathbf{u}(n) + \mathbf{u}(n-1)) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \quad \mathbf{p}(n) = \mathbf{D}\hat{\mathbf{p}}(n) \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}\mathbf{G} \quad (108)$$

Procedendo nei calcoli si trova:

$$(h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & \alpha & 0 \\ 1 & h-1 & 1 \\ 0 & -\beta & h \end{vmatrix}; \quad (h\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & -\alpha & 0 \\ -1 & h+1 & -1 \\ 0 & \beta & h \end{vmatrix} \quad (109)$$

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{h^2 + h + \beta - \alpha} \begin{vmatrix} \frac{h^2 + h + \beta}{h} & \alpha & \frac{\alpha}{h} \\ 1 & h & 1 \\ -\frac{\beta}{h} & -\beta & \frac{h^2 + h - \alpha}{h} \end{vmatrix}; \quad (110)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{h^2 + h + \beta - \alpha} \begin{vmatrix} h^2 + h + \beta + \alpha & 2\alpha h & 2\alpha \\ 2h & h^2 - h - \beta + \alpha & 2h \\ -2\beta & -2\beta h & h^2 + h - \beta + \alpha \end{vmatrix} \quad (111)$$

$$\mathbf{G} = (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} = \frac{1}{h^2 + h + \beta - \alpha} \begin{vmatrix} -\alpha(h^2 + h + \beta)/h \\ -\alpha \\ \alpha\beta/h \end{vmatrix} \quad (112)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(n) = \frac{1}{h^2 + h + \beta - \alpha} \begin{vmatrix} h^2 + h + \beta + \alpha & 2\alpha h & 2\alpha \\ 2h & h^2 - h - \beta + \alpha & 2h \\ -2\beta & -2\beta h & h^2 + h - \beta + \alpha \end{vmatrix} \mathbf{w}(n-1) +$$

$$\frac{1}{h^2 + h + \beta - \alpha} \begin{vmatrix} -\frac{\alpha}{h}(h^2 + h + \beta) \\ -\alpha \\ \frac{\alpha\beta}{h} \end{vmatrix} y(n-1) \quad (113)$$

$$\mathbf{p}(n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \hat{\mathbf{p}}(n) \quad (114)$$

$$\mathbf{K} = k = -\frac{1}{h} \frac{\alpha(h^2 + h + \beta)}{h^2 + h + \beta - \alpha} \quad (115)$$

ponendo:

$$\gamma \equiv \frac{1}{h^2 + h + \beta - \alpha} \quad (116)$$

il sistema diventa:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\hat{p}_1(n) = \gamma \left( (h^2 + h + \beta + \alpha)x_1(n-1) + 2\alpha hx_2(n-1) + 2\alpha x_3(n-1) - \frac{\alpha}{h}(h^2 + h + \beta)y(n-1) \right) \\
\hat{p}_2(n) = \gamma \left( 2hx_1(n-1) + (h^2 - h - \beta + \alpha)x_2(n-1) + 2hx_3(n-1) - \alpha y(n-1) \right) \\
\hat{p}_3(n) = \gamma \left( -2\beta x_1(n-1) + -2\beta hx_2(n-1) + (h^2 + h - \beta - \alpha)x_3(n-1) - \frac{\alpha\beta}{h}y(n-1) \right) \\
p(n) = \hat{p}_1(n) \\
y(n) = g(p(n)) \\
x_1(n) = \hat{p}_1(n) - \gamma \frac{\alpha}{h}(h^2 + h + \beta)y(n) \\
x_2(n) = \hat{p}_2(n) - \gamma \alpha y(n) \\
x_3(n) = \hat{p}_3(n) - \frac{\gamma \alpha \beta}{h}y(n)
\end{array} \right. \quad (117)$$

La funzione  $g$  si determina effettuando lo *shear* della funzione non lineare  $f$ ; lo shear è effettuato di una quantità  $k$  che è negativa; essendo la funzione non lineare sempre a pendenza positiva, non vi sono problemi di invertibilità.

#### 2.4.4 Equazione di Van der Pol

L'oscillatore di Van der Pol [10] è descritto da un'equazione differenziale non lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (118)$$

dove  $\mu$  è un parametro adimensionale che assume normalmente valori tra 1 e 5. È immediato passare alle equazioni in forma di variabili di stato:

$$\left\{ \begin{array}{l}
x_1' = x_2 \\
x_2' = y - x_1 \\
y = \mu(1-x_1^2)x_2
\end{array} \right. \quad (119)$$

e da queste alla forma richiesta dal metodo K:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathbf{w}' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{w} + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} y \\
\mathbf{x} = \mathbf{Iw} \\
y = \mathbf{f}(\mathbf{x})
\end{array} \right. \quad (120)$$

Il sistema è non lineare e ha dimensione dello spazio di stato pari a 2, è autonomo<sup>6</sup> (non vi sono ingressi esterni), la funzione non lineare è da  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}$ : siamo nel caso MISO, mentre le matrici  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  ed  $\mathbf{F}$  sono nulle. Si osservi che in questo caso, dato che  $\mathbf{D}=\mathbf{I}$  e  $\mathbf{x}=\mathbf{w}$ , per la determinazione di  $\mathbf{p}(n)$  e  $\mathbf{K}$  si ha:

<sup>6</sup> In letteratura è studiata anche la forma *perturbata* (non autonoma) del sistema di Van der Pol. Si invita il lettore a scrivere le equazioni del sistema con un ingresso esterno, a trovare il sistema numerico dato dal metodo K e a simulare il sistema stesso. A tale proposito si veda ad esempio [10], p. 986.

$$\mathbf{p}(n) = \hat{\mathbf{p}}(n) = \mathbf{H}\mathbf{w}(n-1) + \mathbf{G}\mathbf{y}(n-1) \quad \mathbf{K} = \mathbf{G} \quad (121)$$

Procedendo nei calcoli si trova:

$$(h\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & 1 \\ -1 & h \end{vmatrix}; \quad (h\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} h & -1 \\ 1 & h \end{vmatrix} \quad (122)$$

$$(h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{1+h^2} \begin{vmatrix} h & 1 \\ -1 & h \end{vmatrix}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{G} \equiv (h\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{C} = \frac{1}{1+h^2} \begin{vmatrix} 1 \\ h \end{vmatrix} \quad (123)$$

Le equazioni complete del sistema a tempo discreto sono quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{p}(n) = \frac{1}{h^2+1} \left( \begin{vmatrix} h^2-1 & 2h \\ -2h & h^2-1 \end{vmatrix} \mathbf{x}(n-1) + \begin{vmatrix} 1 \\ h \end{vmatrix} y(n-1) \right) \\ y(n) = g(\mathbf{p}(n)) \\ \mathbf{x}(n) = \mathbf{p}(n) + \frac{1}{h^2+1} \begin{vmatrix} 1 \\ h \end{vmatrix} y(n) \end{cases} \quad (124)$$

La funzione  $g$  si determina effettuando lo *shear* della funzione non lineare  $f$ ; lo shear è effettuato di *due* quantità:  $k_1$  e  $k_2$  che, essendo entrambe positive ed essendo anche la funzione non lineare a pendenza positiva, possono dare problemi di invertibilità.

Nel grafico seguente è dato il diagramma di stato del sistema:

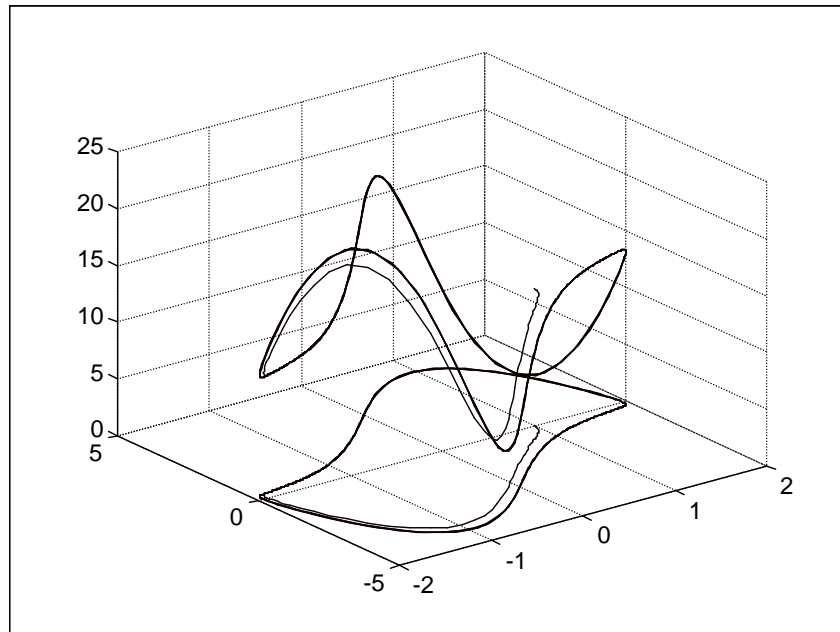


Fig 19. Simulazione del circuito di Van de Pol con  $\mu=0.5$ ; condizioni iniziali:  $x_1=1$ ,  $x_2=0$ ;  $h=54$ .  
Il grafico riporta l'andamento delle variabili  $p_1$  e  $p_2$  (ascisse) e  $y$  (ordinate).

## 2. 4.5 Il clarinetto

Secondo Schumacher [9] un'ancia può essere ben modellata con un oscillatore smorzato del secondo ordine:

$$\mu_r \left( \frac{d^2x}{dt^2} + g_r \frac{dx}{dt} + \omega_r (x - H) \right) = p - P_0 \quad (125)$$

dove  $p$  è la pressione al bocchino,  $x$  è lo scostamento dell'ancia dalla posizione di riposo,  $P_0$  è la pressione statica nella bocca dell'esecutore,  $H$  è l'apertura dell'ancia a riposo e  $\mu_r$ ,  $g_r$  e  $\omega_r$  sono costanti opportune.

La pressione al bocchino  $p$  è inoltre una funzione non lineare e istantanea del flusso  $u$ , della posizione dell'ancia  $x$  e della velocità dell'ancia  $x'$  [9]:

$$p = f(u, x, dx/dt) + P_0 \quad (126)$$

Infine, ricordando la trattazione del tubo sollecitato di pagina 6, la relazione che intercorre tra flusso e pressione al punto di giunzione tra ancia e tubo acustico è quella della giunzione parallelo, come può essere facilmente verificato:

$$p = Z_0 u + 2p^+ \quad (127)$$

Nella simbologia introdotta si ha quindi:

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix}; \quad \mathbf{y} = p - P_0; \quad \mathbf{u} = \begin{vmatrix} H \\ P_0 \\ p^+ \end{vmatrix}; \quad (128)$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_r & -g_r \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \omega_r & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega_r} \end{vmatrix}; \quad (129)$$

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{Z_0} & -\frac{2}{Z_0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{1}{Z_0} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad (130)$$

La matrice  $\mathbf{K}$  risulta essere:

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} \frac{1}{Z_0} \\ 1 \\ \frac{\mu_r(\omega_r + h^2 + g_r h)}{h} \\ \frac{\mu_r(\omega_r + h^2 + g_r h)}{h} \end{vmatrix} \quad (131)$$

Il sistema non lineare ha dimensione dello spazio di stato pari a 2, è autonomo (non vi sono ingressi esterni), la funzione non lineare è da  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}$ : siamo ancora una volta nel caso MISO.

### 3. Il metodo W

Il metodo W [4, 5, 6] si basa sulla decomposizione delle grandezze trans- e per- in “componenti d'onda”<sup>7</sup> del tutto analoghe a quelle viste nelle guide d'onda [3].

Si definiscono quindi:

$$v^+ \equiv \frac{v + Ri}{2} \qquad i^+ \equiv \frac{i + v / R}{2} \qquad (132)$$

$$v^- \equiv \frac{v - Ri}{2} \qquad i^- \equiv \frac{i - v / R}{2} \qquad (133)$$

Dove R è una costante per il momento arbitraria, omogenea ad una resistenza, chiamata *resistenza di riferimento*.

Si constata subito che:

$$v = v^+ + v^- \qquad i = i^+ + i^- \qquad (134)$$

$$v^+ = Ri^+ \qquad v^- = -Ri^- \qquad (135)$$

$$i = \frac{v^+ - v^-}{R} \qquad v = R(i^+ - i^-) \qquad (136)$$

#### 3.1 Coefficiente di *scattering*

Si considerino le variabili d'onda che insistono su un generico bipolo lineare di impedenza Z. Si definisce il “coefficiente di *scattering* reale” come il rapporto tra onda riflessa e onda incidente.

Più generalmente, se il bipolo possiede un'impedenza complessa, si definisce il “coefficiente di *scattering* complesso” il rapporto tra le trasformate di Laplace delle grandezze d'onda riflessa e incidente. In entrambi i casi, il coefficiente di *scattering* definisce una trasformazione lineare che consente di ricavare la grandezza riflessa dalla grandezza incidente.

Si osservi che la definizione data prescinde dalla natura delle onde: esisteranno quindi un coefficiente di scattering per onde di trans-variabili (tensione) e un coefficiente di scattering per onde di per-variabili (corrente).

Nel caso complesso si ha per definizione:

$$r_V = \frac{V^-}{V^+} = \frac{V - RI}{V + RI} = \frac{V / I - R}{V / I + R} = \frac{Z - R}{Z + R} \qquad (137)$$

$$r_I = \frac{I^-}{I^+} = \frac{I - V / R}{I + V / R} = \frac{R - V / I}{R + V / I} = \frac{R - Z}{R + Z} = -r_V \qquad (138)$$

---

<sup>7</sup> La lettera “W” deriva dalla parola inglese “wave”.

Con riferimento ai coefficienti di scattering per trans-variabile, si analizzano ora alcuni casi notevoli.

### 3.1.1 Resistore

Nel caso di un resistore  $R_0$  si ha immediatamente:

$$r_R = \frac{R_0 - R}{R_0 + R} \quad (139)$$

Si osservi che se  $R=R_0$  si ha  $r_R=0$ . Nel caso di resistenza di riferimento “adattata”, quindi, il resistore non dà riflessione.

### 3.1.2 Condensatore

Nel caso di un condensatore  $C$  si ha:

$$r_C(s) = \frac{1/sC - R}{1/sC + R} \quad (140)$$

Per passare dal dominio analogico al dominio numerico si può usare, al solito, la trasformazione bilineare:

$$r_C(z) = \frac{p_c + z^{-1}}{1 + p_c z^{-1}} \quad (141)$$

con:

$$p_c \equiv \frac{1/h - RC}{1/h + RC} \quad (142)$$

In generale  $r_C(z)$  è un filtro passatutto; se però si sceglie  $R=1/hC$ , si ha  $p_c=0$  e di conseguenza  $r_C(z)=z^{-1}$ . Nel caso di resistenza di riferimento “adattata”, quindi, il condensatore non dà riflessione *istantanea*. Si noti che, se si sceglie come di consueto  $h=2/T$ , la relazione di adattamento diventa:  $R=T/2C$ .

### 3.1.3 Induttore

Nel caso di un induttore  $L$  si ha:

$$r_L(s) = \frac{sL - R}{sL + R} \quad (143)$$

Passando dal dominio analogico al dominio numerico come nel caso del condensatore:

$$r_L(z) = -\frac{p_L + z^{-1}}{1 + p_L z^{-1}} \quad (144)$$

con:

$$p_L \equiv \frac{1/h - L/R}{1/h + L/R} \quad (145)$$

Come nel caso precedente, in generale  $r_L(z)$  è un filtro passatutto; se però si sceglie  $R=hL$ , si ha  $p_L=0$  e di conseguenza  $r_L(z)=-z^{-1}$ . Nel caso di resistenza di riferimento “adattata”, quindi, l'induttore non dà riflessione *istantanea*. Si noti che, se si sceglie come di consueto  $h=2/T$ , la relazione di adattamento diventa:  $R=2L/T$ .



### 3.1.4 Generatore di tensione reale

Nel caso di un generatore di tensione ideale  $v_g$  con in serie un resistore  $R_g$  non è possibile dare direttamente il coefficiente di scattering. Tuttavia, occorre ricordare che l'obiettivo è quello di arrivare ad esprimere l'onda riflessa come funzione dell'onda incidente.

A tale proposito si può scrivere:

$$v^+ = \frac{v + Ri}{2} = \frac{(v_g + R_g i) + Ri}{2} \quad (146)$$

$$v^- = \frac{v - Ri}{2} = \frac{(v_g + R_g i) - Ri}{2} \quad (147)$$

Scrivendo la corrente  $i$  in funzione delle onde di tensione, si trova in entrambe le equazioni:

$$v^- = \frac{R}{R_g + R} v_g + \frac{R_g - R}{R_g + R} v^+ \quad (148)$$

che dà il contributo riflesso in funzione del contributo incidente (e della tensione del generatore). Si osservi che per  $v_g=0$  si ritrova il caso del resistore discusso sopra.

Se si sceglie  $R=R_g$  si trova:

$$v^- = \frac{v_g}{2} \quad (149)$$

indipendentemente dall'onda incidente, che rimane indeterminata. Nel caso di resistenza di riferimento "adattata", quindi, il generatore non dà riflessioni ma introduce una componente d'onda che dipende dal solo valore  $v_g$ .

## 3.2 Elementi di connessione: *adattatori*

Dati gli elementi lineari visti, nasce il problema di connetterli tra loro in modo da costruire una rete. È intuibile che, se durante il processo di connessione si sceglie arbitrariamente la resistenza di riferimento dei componenti, si creeranno riflessioni istantanee ai capi di bipoli affacciati, ovvero nasceranno problemi di non computabilità. In questo paragrafo si studia la possibilità di connettere i componenti visti in modo da garantire ove possibile le condizioni di adattamento per i bipoli, in modo da creare grafi computabili.

### 3.2.1 Giunzione a 3 porte serie

Nel caso di collegamento in serie tra tre bipoli valgono le seguenti ipotesi:

$$v_1 + v_2 + v_3 = 0 \quad i_1 = i_2 = i_3 \quad (150)$$

Nota la definizione delle componenti d'onda di tensione, le ipotesi si possono riscrivere come segue:

$$(v_1^+ + v_1^-) + (v_2^+ + v_2^-) + (v_3^+ + v_3^-) = 0 \quad (151)$$

$$\frac{v_1^+ - v_1^-}{R_1} = \frac{v_2^+ - v_2^-}{R_2} = \frac{v_3^+ - v_3^-}{R_3} \quad (152)$$

Dopo semplici passaggi si trova:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \\ v_3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & 1-\alpha_2 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & -\alpha_3 & 1-\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \\ v_3^+ \end{bmatrix} \quad (153)$$

dove:

$$\alpha_i = \frac{2R_i}{R_1 + R_2 + R_3} \quad i=1,2,3 \quad (154)$$

Il sistema scritto esprime, come al solito, le onde riflesse alla giunzione in funzione delle onde incidenti. Come si può notare, esiste una dipendenza istantanea di ciascuna onda riflessa dalla rispettiva incidente; ciò può causare un problema di non computabilità se il bipolo che insiste su quella porta possiede un coefficiente di scattering che presenta anch'esso una dipendenza istantanea tra ingresso e uscita. Le relazioni scritte, tuttavia, consentono di fare alcune utili osservazioni in questo senso.

In primo luogo si nota che  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$ . Dunque, è possibile esprimere uno dei tre coefficienti  $\alpha$  in funzione degli altri. Sia quindi  $\alpha_3 = 2 - \alpha_1 - \alpha_2$ .

In secondo luogo, si osserva che, se è possibile porre  $1 - \alpha_3 = 0$ , si sopprime la dipendenza istantanea tra ingresso e uscita sulla porta 3. Per la relazione scritta in precedenza, la  $1 - \alpha_3 = 0$  implica  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ .

Quest'ultima condizione si riflette in un'analogia condizione sulle resistenze di riferimento; di fatto, con le ipotesi fatte, si ha  $R_3 = R_1 + R_2$ . In sostanza, la resistenza di riferimento  $R_3$  è "adattata" alla somma (serie) delle altre due.

Dopo di ciò, il sistema si può riscrivere in questo modo:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \\ v_3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1 & -\alpha_1 & -\alpha_1 \\ \alpha_1-1 & \alpha_1 & \alpha_1-1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \\ v_3^+ \end{bmatrix} \quad (155)$$

Come si vede, il sistema è funzione del solo coefficiente  $\alpha_1$  e la porta 3 non dà luogo a riflessioni istantanee. Le resistenze  $R_1$  ed  $R_2$  si possono scegliere arbitrariamente, ad esempio in modo da rispettare le condizioni di adattamento dei coefficienti di scattering dei bipoli affacciati, mentre la resistenza  $R_3$  è vincolata al valore  $R_1 + R_2$  in modo da non creare dipendenza istantanea tra uscita ed ingresso.

Il simbolo per indicare la giunzione a 3 porte serie adattata è il seguente:

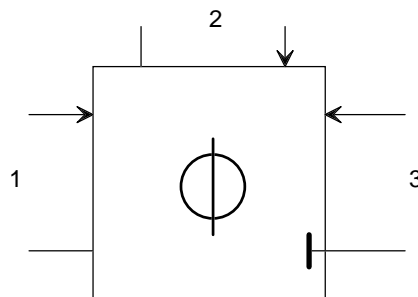


Fig 20. Simbolo della giunzione 3 porte serie adattata sulla porta 3.

### 3. 2.2 Esempio: circuito E-R-L-C.

Sia dato un semplice circuito E-R-L-C serie, come in figura:

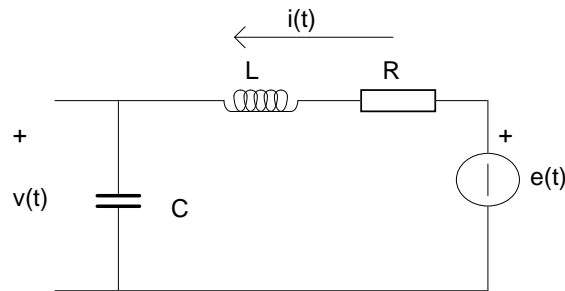


Fig 21. circuito E-R-L-C

Usando un adattatore 3 porte serie senza dipendenza istantanea sulla porta 3, lo schema diventa il seguente:

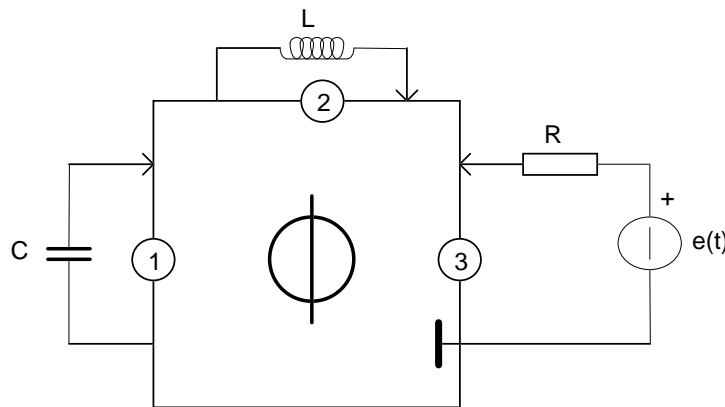


Fig 22. circuito E-R-L-C con simbologia Wave: ciascun bipolo sottintende il rispettivo coefficiente di scattering.

Si sceglie  $R_1=T/2C$ ,  $R_2=2L/T$  in modo da avere la condizione di adattamento sulle porte 1 e 2; come si ricorderà, questo garantisce che i coefficienti di scattering del condensatore e dell'induttore siano rispettivamente un ritardo e un ritardo con inversione di segno. Nello schema scelto, la condizione di non riflessione alla porta 3 vincola ad avere  $R_3=R_1+R_2=T/2C+2L/T$ . In questo caso, applicando le equazioni del generatore di tensione *senza* adattamento si ottiene lo schema seguente:

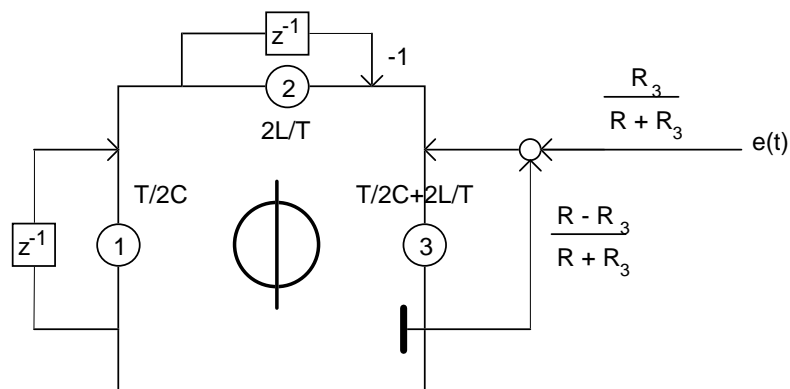


Fig 23. Circuito E-R-L-C risolto con il metodo Wave.

Si noti che nel caso del circuito E-R-L-C, la condizione di assenza di riflessione alla porta 3 non era necessaria, potendo essere sostituita dalla condizione di adattamento sul generatore reale di tensione. Si è preferito usare la giunzione con assenza di riflessione affinché il lettore acquisti confidenza con questo blocco standard, frequentemente usato in presenza di componenti non lineari.

### 3.2.3 Giunzione a 3 porte parallelo

Nel caso di collegamento in parallelo tra tre bipoli valgono le seguenti ipotesi:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \qquad v_1 = v_2 = v_3 \qquad (156)$$

Nota la definizione delle componenti d'onda di tensione, le ipotesi si possono riscrivere come segue:

$$\frac{v_1^+ - v_1^-}{R_1} + \frac{v_2^+ - v_2^-}{R_2} + \frac{v_3^+ - v_3^-}{R_3} = 0 \qquad (157)$$

$$(v_1^+ + v_1^-) = (v_2^+ + v_2^-) = (v_3^+ + v_3^-) \qquad (158)$$

Dopo semplici passaggi, analoghi al caso serie, si trova:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \\ v_3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 - 1 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \\ v_3^+ \end{bmatrix} \qquad (159)$$

dove:

$$\alpha_i = \frac{2G_i}{G_1 + G_2 + G_3} \quad G_i = 1/R_i \quad i=1,2,3 \qquad (160)$$

Anche in questo caso è  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$ , e quindi si può scrivere  $\alpha_3 = 2 - \alpha_1 - \alpha_2$ . Pertanto, ponendo  $1 - \alpha_3 = 0$ , si sopprime la dipendenza istantanea tra ingresso e uscita sulla porta 3 e si trova la relazione  $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ , da cui anche  $G_3 = G_1 + G_2$ . Anche questa volta, l'ammettenza di riferimento  $G_3$  è "adattata" alla somma (parallelo) delle altre due.

Dopo di ciò, il sistema si può riscrivere in questo modo:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \\ v_3^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 & 1 - \alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & -\alpha_1 & 1 \\ \alpha_1 & 1 - \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \\ v_3^+ \end{bmatrix} \qquad (161)$$

Come si vede, il sistema è ancora una volta funzione del solo coefficiente  $\alpha_1$  e valgono tutte le considerazioni fatte nel caso del 3 porte serie.

Il simbolo per indicare la giunzione a 3 porte parallelo adattata è il seguente:

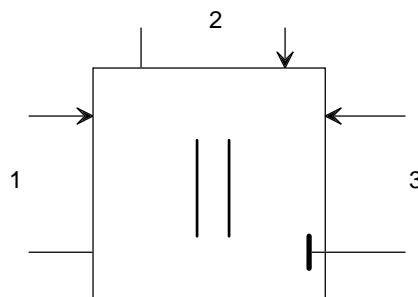


Fig 24. Simbolo della giunzione 3 porte parallelo adattata sulla porta 3.

### 3.3 Non linearità nel metodo W

#### 3.3.1 Resistori non lineari

Un resistore non lineare è dato attraverso una legge del tipo:

$$F(v, i) = 0 \quad (162)$$

se tale legge si può esplicitare in tensione, scrivendo ad esempio  $v=v(i)$ , il componente è detto “controllato in corrente”. Se invece si può scrivere  $i=i(v)$ , il componente è detto “controllato in tensione”.

Nel dominio d'onda si può scrivere:

$$f(v^+, v^-) \equiv F\left(v^+ + v^-, \frac{v^+ - v^-}{R}\right) \quad (163)$$

Le condizioni che consentono di esplicitare la  $f()$  in un coefficiente di scattering *non lineare*:  $v^-=r(v^+)$  sono quelle indicate dal teorema della funzione implicita, per cui si ha:

$$v'(i) \neq -R \quad (\text{resistori controllati in corrente}) \quad (164)$$

$$i'(v) \neq -1/R \quad (\text{resistori controllati in tensione}) \quad (165)$$

Ancora una volta si è in presenza di una trasformazione d'assi, ma questa volta, oltre allo shear, vi è rotazione.

#### 3.3.2 Condensatori non lineari: per-integratore intensivo.

Un condensatore non lineare è dato attraverso una legge del tipo:

$$F(v, q) = 0 \quad q = \int idt \quad (166)$$

Ancora una volta, se si può scrivere  $v=v(q)$ , il componente è detto “controllato in corrente (o carica)”. Se invece si può scrivere  $q=q(v)$ , il componente è detto “controllato in tensione”.

Per ricondurre la funzione vista ad un'equazione in forma algebrica in  $(v^+, v^-)$  si introducono due nuove variabili d'onda così definite:

$$u^+ = \frac{1}{2}\left(v + \frac{q}{C}\right) \quad u^- = \frac{1}{2}\left(v - \frac{q}{C}\right) \quad (167)$$

con  $C$  “capacità di riferimento” arbitraria. Si vede subito che:

$$v = u^+ + u^- \quad q = C(u^+ - u^-) \quad (168)$$

Si tenta ora di determinare un elemento di connessione a due porte che consenta di passare dalle variabili  $(v^+, v^-)$  alle  $(u^+, u^-)$ ; l'uso di queste ultime, infatti, trasforma la non linearità in una relazione algebrica.

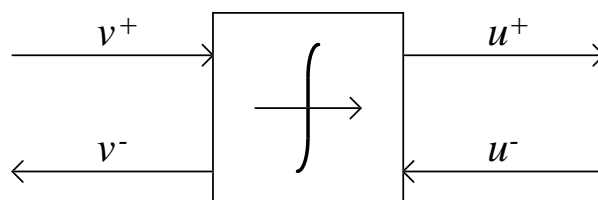


Fig 25. Schema dell'elemento di connessione tra  $(v^+, v^-)$  e  $(u^+, u^-)$ : per-integratore intensivo.

L'integratore soddisfa a sinistra alle note:

$$v = v^+ + v^- \qquad i = \frac{v^+ - v^-}{R} \qquad (169)$$

mentre a destra valgono le

$$v = u^+ + u^- \qquad q = C(u^+ - u^-) \qquad (170)$$

Tenendo conto che  $dq/dt = i$ , si scrive:

$$\begin{cases} v^+ + v^- = u^+ + u^- \\ RC \left( \frac{du^+}{dt} - \frac{du^-}{dt} \right) = v^+ - v^- \end{cases} \qquad (171)$$

cioè nel dominio della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} V^+ + V^- = U^+ + U^- \\ V^+ - V^- = sRCU^+ - sRCU^- \end{cases} \qquad (172)$$

da cui si ricava immediatamente:

$$\begin{cases} V^- = \frac{1-sRC}{1+sRC}V^+ + \frac{2sRC}{1+sRC}U^- \\ U^+ = \frac{2}{1+sRC}V^+ - \frac{1-sRC}{1+sRC}U^- \end{cases} \qquad (173)$$

Come si vede, l'equazione scritta rappresenta una generalizzazione della giunzione di Kelly-Lochbaum. Se infatti si definisce:

$$H(s) \equiv \frac{1-sRC}{1+sRC} \qquad (174)$$

la relazione vista diventa:

$$\begin{cases} V^- = H(s)V^+ + (1-H(s))U^- \\ U^+ = (1+H(s))V^+ - H(s)U^- \end{cases} \qquad (175)$$

Discretizzando il filtro  $H(s)$  con la trasformazione bilineare si ottiene:

$$H(z) \equiv H(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{p+z^{-1}}{1+pz^{-1}} \qquad \text{con } p \equiv \frac{T-2RC}{T+2RC} \qquad (176)$$

e si perviene alla forma discretizzata della (175). Al solito, ponendo  $C=T/2R$  si ha  $H(z)=z^{-1}$  e quindi:

$$\begin{cases} V^- = z^{-1}V^+ + (1-z^{-1})U^- \\ U^+ = (1+z^{-1})V^+ - z^{-1}U^- \end{cases} \qquad (177)$$

che rappresenta la versione *adattata* o *reflection-free* del per-integratore intensivo. In tale schema non vi è dipendenza istantanea tra i segnali in ingresso e in uscita di ciascuna porta.

Il per-integratore intensivo adattato può essere impiegato congiuntamente alla funzione di riflessione esposta sopra per realizzare un condensatore non lineare:

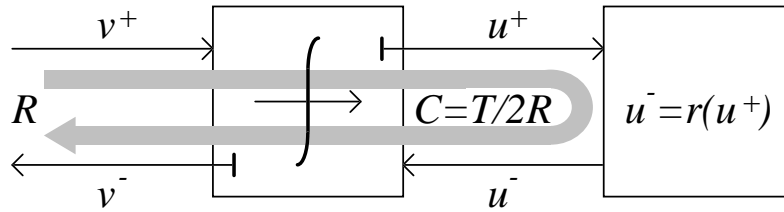


Fig 26. Condensatore non lineare con per-integratore intensivo adattato. Si noti che l'adattamento *non* comporta l'assenza di percorsi privi di elementi di ritardo tra l'ingresso e l'uscita del componente completo.

La presenza di una connessione priva di ritardi tra ingresso ed uscita del componente impongono l'adattamento della porta a cui esso è collegato.

### 3.3.3 Induttori non lineari: trans-integratore intensivo

Dualmente al caso del condensatore, un induttore non lineare è dato attraverso una legge del tipo:

$$F(\varphi, i) = 0 \quad \varphi = \int v dt \quad (178)$$

Ancora una volta, se si può scrivere  $\varphi = \varphi(i)$ , il componente è detto "controllato in corrente". Se invece si può scrivere  $i = i(\varphi)$ , il componente è detto "controllato in tensione".

Per ricondurre la funzione vista ad un'equazione algebrica in  $(v^+, v^-)$  si introducono due nuove variabili d'onda così definite:

$$\varphi^+ = \frac{\varphi + Li}{2} \quad \varphi^- = \frac{\varphi - Li}{2} \quad (179)$$

con L "induttanza di riferimento" arbitraria. Si vede subito che:

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \quad i = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{L} \quad (180)$$

Si tenta ora di determinare un elemento di connessione a due porte che consenta di passare dalle variabili  $(v^+, v^-)$  alle  $(\varphi^+, \varphi^-)$ ; come prime, l'uso di queste ultime trasforma la non linearità in una relazione algebrica..

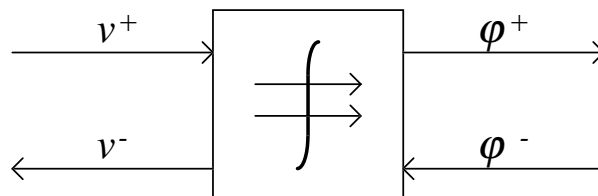


Fig 27. Schema dell'elemento di connessione tra  $(v^+, v^-)$  e  $(\varphi^+, \varphi^-)$ : trans-integratore estensivo.

L'integratore soddisfa a sinistra alle note:

$$v = v^+ + v^- \quad i = \frac{v^+ - v^-}{R} \quad (181)$$

mentre a destra valgono le

$$\varphi = \varphi^+ + \varphi^- \quad i = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{L} \quad (182)$$

Tenendo conto che  $d\varphi/dt = v$ , si scrive:

$$\begin{cases} v^+ + v^- = \frac{d\varphi^+}{dt} + \frac{d\varphi^-}{dt} \\ \frac{R}{L}(\varphi^+ - \varphi^-) = v^+ - v^- \end{cases} \quad (183)$$

cioè nel dominio della trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} V^+ + V^- = s\Phi^+ + s\Phi^- \\ V^+ - V^- = \frac{R}{L}\Phi^+ - \frac{R}{L}\Phi^- \end{cases} \quad (184)$$

da cui si ricava immediatamente:

$$\begin{cases} V^- = -H(s)V^+ + \frac{R}{L}(1-H(s))\Phi^- \\ \Phi^+ = (1+H(s))V^+ + \frac{R}{L}H(s)\Phi^- \end{cases} \quad \text{con } H(s) \equiv \frac{1-sL/R}{1+sL/R} \quad (185)$$

Come si vede, l'equazione scritta rappresenta una generalizzazione della giunzione di Kelly-Lochbaum con l'aggiunta di due moltiplicatori agli ingressi.

Discretizzando il filtro  $H(s)$  con la trasformazione bilineare si ottiene:

$$H(z) \equiv H(s) \Big|_{s=\frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}} = \frac{p+z^{-1}}{1+pz^{-1}} \quad \text{con } p \equiv \frac{T-2L/R}{T+2L/R} \quad (186)$$

e si perviene alla forma discretizzata del trans-integratore intensivo. Al solito, ponendo  $L=RT/2$  si ha  $H(z)=z^{-1}$  e quindi:

$$\begin{cases} V^- = -z^{-1}V^+ + \frac{R}{L}(1+z^{-1})\Phi^- \\ \Phi^+ = \frac{R}{L}(1-z^{-1})V^+ + z^{-1}\Phi^- \end{cases} \quad (187)$$

che rappresenta la versione *adattata* o *reflection-free* del trans-integratore intensivo. In tale schema non vi è dipendenza istantanea tra i segnali in ingresso e in uscita di ciascuna porta.

Come nel caso del condensatore non lineare, il trans-integratore intensivo adattato può essere impiegato congiuntamente alla funzione di riflessione esposta sopra per realizzare un induttore non lineare:

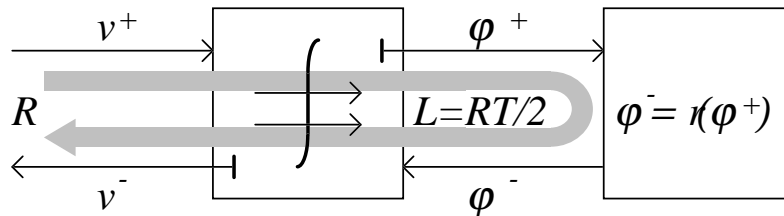


Fig 28. Induttore non lineare con trans-integratore intensivo adattato. Si noti l'analogia completa con il caso del condensatore.

Come nel caso del condensatore, la presenza di una connessione priva di ritardi tra ingresso ed uscita del componente impongono l'adattamento della porta a cui esso è collegato.



## Appendice A:

Sia data la forma più generale di collegamento per un sistema non lineare retroazionato su una non linearità istantanea:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}_w(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{y}}) \\ \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{G}_x(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{y}}) \\ \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{x}}) \end{cases} \quad (188)$$

Dove sia  $\mathbf{F}_w$  che  $\mathbf{G}_x$  sono funzioni generalmente non lineari.

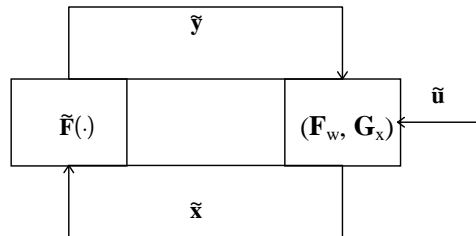


Fig. 29. Collegamento retroazionato tra sistema dinamico generico e funzione istantanea.

Sia ora  $\tilde{\mathbf{y}}(n) = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{G}_x(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{y})) \equiv \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{y})$  la funzione ottenuta per composizione di  $\mathbf{G}_y$  e  $\tilde{\mathbf{F}}$ . Sia inoltre:

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{w}^T, \mathbf{u}^T, \tilde{\mathbf{y}}^T] = \mathbf{D}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{y}} \quad (189)$$

con:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (190)$$

Il sistema si muta in:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{y}} = \Phi(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (191)$$

Sia infine  $\mathbf{v} = \mathbf{F}_w(\mathbf{x})$  e:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \\ \tilde{\mathbf{y}} = \Phi(\mathbf{x}) \end{cases} \equiv \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (192)$$

dove:

$$\mathbf{y}^T = [\mathbf{v}^T, \tilde{\mathbf{y}}^T] \qquad \mathbf{f}^T = [\mathbf{F}_w^T, \Phi^T] \qquad (193)$$

Si ha:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{C}\mathbf{y} \\ \mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{w} + \mathbf{E}\mathbf{u} + \mathbf{F}\mathbf{y} \\ \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{cases} \qquad (194)$$

con:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I} \quad 0] \qquad \mathbf{F} = [0 \quad \tilde{\mathbf{F}}] \qquad (195)$$

che è la forma del sistema (16) di pagina 11, con  $\mathbf{A}=0$  e  $\mathbf{B}=0$ .

Si osservi che, benché in apparenza la forma scritta sia più semplice di quella studiata fino ad ora, essa soffre del grave difetto di avere una funzione non lineare istantanea con codominio di dimensione superiore a quello di (16); pertanto, la parte lineare risulta “più semplice” a scapito della parte non lineare che risulta “più complessa” (siamo infatti nel caso MIMO). Per questo motivo si preferisce usualmente porre il sistema nella forma (16).

## 4. Bibliografia

- [1] T.Felderhoff: "Simulation of nonlinear circuits with period doubling and chaotic behavior by wave digital filter principles" *IEEE transaction on Circuits and Systems-I: Fundamental and Theory applications*, vol. 41, n. 7, jul. 1994.
- [2] A.Lepschy, U.Viaro: *Guida allo studio dei controlli automatici*. Patron editore, Bologna 1986.
- [3] D.Rocchesso: *Strutture per la Sintesi per Modelli Fisici*. Rapporto interno C.S.C, Padova 1997.
- [4] A.Sarti: "Wave Digital Circuits" *Atti del workshop 'La sintesi per modelli fisici'*, Tempo Reale, Firenze, 1997.
- [5] A.Sarti: "Nonlinear Wave Digital Circuits" *proceedings of the EUSIPCO*, pp. 1941-1944, Trieste, sept. 1996.
- [6] A.Sarti, G.De Poli: "Generalized Adaptors with Memory for Nonlinear Wave Digital Structures" submitted to *IEEE Transaction on Circuits and Systems*, di prossima pubblicazione.
- [7] G.Borin, G.De Poli: "A Hysteretic Hammer-String Interaction Model for Physical Model Synthesis" *Proceedings of Northern Acoustics Meeting (NAM)*, Helsinki 1996.
- [8] G.Borin, G.De Poli: "Hysteretic Hammer-String Interaction Model for Physical Model Synthesis" *Atti del workshop: La Sintesi per Modelli Fisici*, Tempo Reale, Firenze 1997.
- [9] R.T.Schumacher: "Ab Initio Calculations of the Oscillations of a Clarinet" *Acustica*, vol. 48, no. 2, pp. 71-85, 1981.
- [10] L.O. Chua *et al.*: "Special Issue on Chaotic Systems" *IEEE proc.*, vol. 75, no. 8, Aug. 1987.