ESERCIZIO: DARLINGTON #1

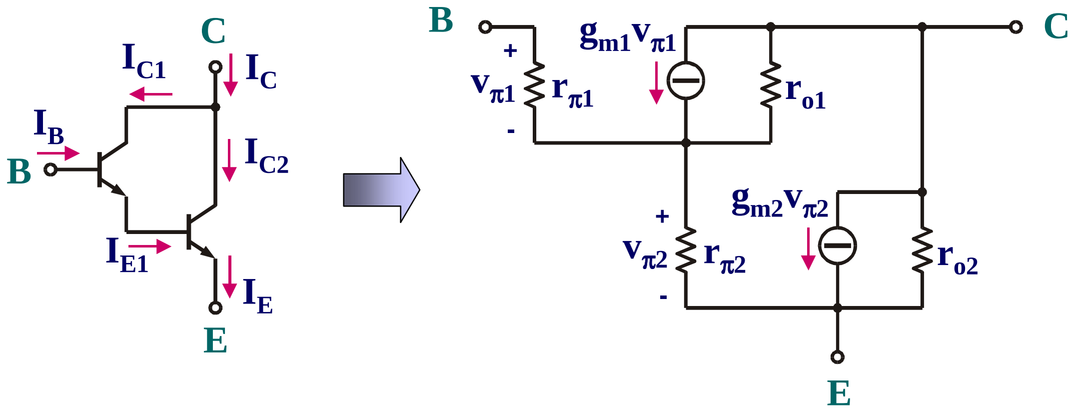

Figura 1

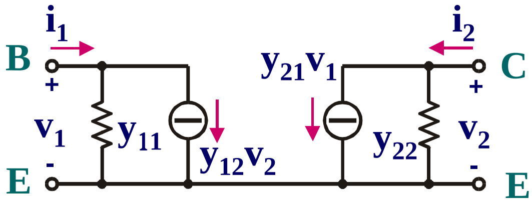

Figura 2

SOLUZIONE

Il modello ai piccoli segnali della connessione darlington è mostrato in figura 1, mentre la sua rappresentazione a parametri [y] è riportata in figura 2 ed è caratterizzata dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} i_1 = y_{11} v_1 + y_{12} v_2 \\ i_2 = y_{21} v_1 + y_{22} v_2 \end{cases} \tag{1}$$

da cui si ricavano le seguenti definizioni dei parametri [y]:

$$y_{11} = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{v_2=0} \tag{2.a}$$

$$y_{12} = \frac{i_1}{v_2}\Big|_{v_1=0} \tag{2.b}$$

$$y_{21} = \frac{i_2}{v_1}\Big|_{v_2=0} \tag{2.c}$$

$$y_{22} = \frac{i_2}{v_2}\Big|_{v_1=0} \tag{2.d}$$

Prima di procedere con il loro calcolo, ricaviamo i vincoli imposti dalla particolare connessione in oggetto ai parametri ai piccoli segnali di ciascun transistor. Per quanto riguarda il parametro transconduttanza possiamo scrivere:

$$I_{B2} = I_{E1} \approx I_{C1} \quad \Rightarrow \quad I_{C2} = \beta_{F2} I_{B2} \approx \beta_{F2} I_{C1} \tag{3.a}$$

da cui,

$$g_{m2} = \frac{I_{C2}}{V_T} \approx \frac{\beta_{F2} I_{C1}}{V_T} = \beta_{F2} g_{m1} \quad \Rightarrow \quad g_{m2} \approx \beta_{02} g_{m1} \tag{3.b}$$

Di conseguenza, le resistenze di ingresso devono soddisfare la seguente relazione:

$$r_{\pi 2} = \frac{\beta_{02}}{g_{m2}} \approx \frac{1}{g_{m1}} = \frac{r_{\pi 1}}{\beta_{01}} \tag{4}$$

Per quanto riguarda le resistenze di uscita possiamo scrivere:

$$r_{o1} = \frac{V_{CE1} + V_A}{I_{C1}} \approx \frac{V_A}{I_{C1}} = \frac{V_A}{I_{C2}} \frac{I_{C2}}{I_{C1}} \approx \beta_{02} r_{o2} \tag{5}$$

Per il calcolo dei parametri [y], facciamo riferimento alle figure 3 e 4, nelle quali si è considerato $v_1 = 0$ e $v_2 = 0$ rispettivamente. Le espressione approssimate ricavate in seguito considerano $\beta_0 >> 1$.

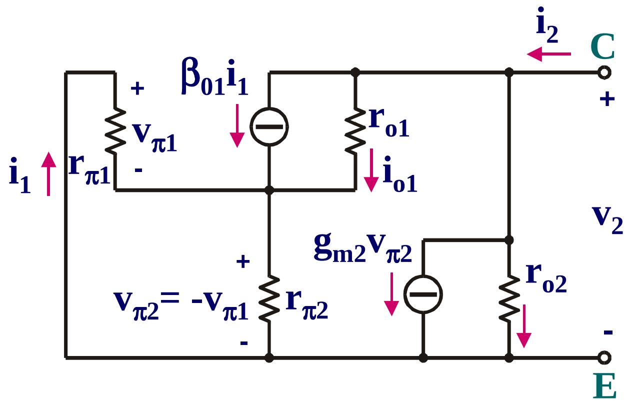

Figura 3

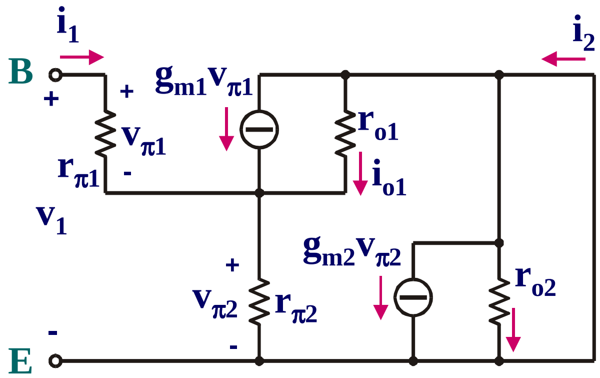

Figura 4

Determinazione di y_{11}:

Il parametro y_{11} rappresenta la conduttanza di ingresso quando viene annullata la tensione di uscita. Il circuito da analizzare è pertanto quello mostrato in figura 4 nel quale si è posto l'uscita in cortocircuito e si è applicato un generatore di tensione v_1 in ingresso. Da questo schema si calcola il rapporto i_1/v_1 come segue:

$$v_1 = r_{\pi 1} i_1 + (r_{o1} // r_{\pi 2})(1+\beta_{01}) i_1 \qquad (6)$$

$$y_{11} = \frac{1}{r_{\pi 1} + (r_{o1} // r_{\pi 2})(1+\beta_{01})} \approx \frac{1}{r_{\pi 1} + r_{\pi 2}\beta_{01}} = \frac{1}{2 r_{\pi 1}} = \frac{1}{2 r_{\pi 2}\beta_{01}} \qquad (7)$$

dove si è fatto uso della (4) e si è considerato $r_{o1} // r_{\pi 2} \approx r_{\pi 2}$ dato che

$$r_{\pi 2} \approx \frac{1}{g_{m1}} = \frac{V_T}{I_{C1}} = \frac{V_T}{V_A}\frac{V_A}{I_{C1}} \approx \frac{V_T}{V_A} r_{o1} << r_{o1} \qquad (8)$$

Determinazione di y_{12}:

Il parametro y_{12} rappresenta la transconduttanza inversa con la porta di ingresso cortocircuitata. Il circuito da analizzare è mostrato in figura 3. Da questo schema otteniamo:

$$i_1 = -\frac{r_{\pi 2}}{r_{\pi 1} + r_{\pi 2}}(\beta_{01} i_1 + i_{01}) \qquad (9)$$

$$i_{01} = \frac{v_2 - (r_{\pi 2} // r_{\pi 1})(\beta_{01} i_1 + i_{01})}{r_{01}} \quad \Rightarrow \quad i_{01} = \frac{1}{1 + \frac{(r_{\pi 2} // r_{\pi 1})}{r_{01}}}\left[\frac{v_2}{r_{01}} - \frac{(r_{\pi 2} // r_{\pi 1})}{r_{01}}\beta_{01} i_1\right] \qquad (10)$$

Sostituendo la (10) equazione nella (9) otteniamo:

$$i_1 = -\frac{r_{\pi 2}}{r_{\pi 1} + r_{\pi 2}}(\beta_{01} i_1) - \frac{r_{\pi 2}}{r_{\pi 1} + r_{\pi 2}}\left[\frac{v_2}{r_{01}} - \frac{(r_{\pi 2} // r_{\pi 1})}{r_{01}}\beta_{01} i_1\right]\frac{1}{1 + \frac{(r_{\pi 2} // r_{\pi 1})}{r_{01}}} \qquad (11)$$

Da questa relazione possiamo trovare l'espressione esatta del parametro y_{12}. Tuttavia, per capire se possiamo trascurarlo o meno abbiamo bisogno di una espressione più semplice che possiamo derivare nel seguente modo:

Notiamo, innanzitutto, che il termine $\frac{r_{\pi 2}}{r_{\pi 1} + r_{\pi 2}}$ può essere così semplificato (si faccia uso della (4)):

$$\frac{r_{\pi 2}}{r_{\pi 1} + r_{\pi 2}} = \frac{r_{\pi 2}}{\beta_{01} r_{\pi 2} + r_{\pi 2}} = \frac{1}{\beta_{01} + 1} \qquad (12)$$

e consideriamo, inoltre:

$$r_{\pi 2} // r_{\pi 1} \approx r_{\pi 2} // (\beta_{01} r_{\pi 2}) \approx r_{\pi 2} \qquad (13)$$

Usando tali approssimazioni e considerando la (8), la (11) diventa:

$$i_1 = -i_1 - \left[\frac{v_2}{\beta_{01} r_{01}} - \frac{r_{\pi 2}}{r_{01}} i_1\right]\frac{1}{1 + \frac{r_{\pi 2}}{r_{01}}} \quad \Rightarrow \quad 2 i_1 \approx -\frac{v_2}{\beta_{01} r_{01}} \qquad (14)$$

da cui si ricava:

$$y_{12} \approx -\frac{1}{2\beta_{01} r_{01}} \approx 0 \tag{15}$$

Determinazione di y_{21}:

Il parametro y_{21} rappresenta la transconduttanza diretta con l'uscita in cortocircuito. Per la sua determinazione si faccia uso della figura 4. Da questo schema calcoliamo:

$$i_2 = g_{m1} v_{\pi 1} + g_{m2} v_{\pi 2} + i_{01} = g_{m1} v_{\pi 1} + v_{\pi 2}\left(g_{m2} - \frac{1}{r_{01}} \right) \tag{16}$$

Dalla maglia di ingresso osserviamo che:

$$v_1 = v_{\pi 1} + v_{\pi 2} = v_{\pi 1}\left[1 + \frac{(r_{\pi 2} // r_{01})}{r_{\pi 1}} (1 + \beta_{01}) \right] \approx 2 v_{\pi 1} \quad \Rightarrow \quad v_{\pi 1} \approx v_{\pi 2} \tag{17}$$

per cui sostituendo nella (16) otteniamo (si ricordi la relazione (3.b)):

$$i_2 \approx \frac{v_1}{2}(g_{m1} + g_{m2}) \quad \Rightarrow \quad y_{21} \approx \frac{g_{m2}}{2} \tag{18}$$

Determinazione di y_{22}:

Il parametro y_{22} rappresenta la conduttanza di uscita quando viene cortocircuitata la porta di ingresso. Il circuito da analizzare rimane quello di figura 3. Calcoliamo, innanzitutto, la resistenza di uscita del primo transistor che coincide con la resistenza di uscita di uno stadio emettitore comune con resistenza di emettitore, cioè:

$$r'_{o1} = r_{o1}\left(1 + \frac{g_{m1} r_{\pi 2}}{1 + \frac{r_{\pi 2}}{r_{\pi 1}}} \right) \approx 2 r_{o1} \tag{19}$$

La corrente di uscita i_2 risulta:

$$i_2 = \frac{v_2}{r'_{o1}} + g_{m2} v_{\pi 2} + \frac{v_2}{r_{o2}} = \frac{v_2}{r'_{o1}} + \frac{v_2}{r_{o2}} + g_{m2}\left(\frac{v_2}{r'_{o1}} (r_{\pi 1} // r_{\pi 2}) \right) \tag{20}$$

da cui, facendo uso della (5), si ottiene:

$$y_{22} \approx \frac{1}{r_{o2}} + \frac{1}{2 r_{o1}} (1 + \beta_{02}) \approx \frac{1}{r_{o2}} + \frac{1}{2 r_{o2}} = \frac{3}{2 r_{o2}} \tag{21}$$

In definitiva, la connessione darlington può essere trattata alla stregua di un singolo transistor avente il seguente modello ai piccoli segnali:

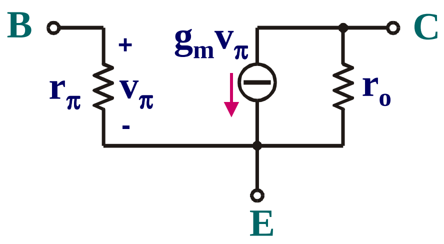

Figura 5

in cui i parametri valgono:

$$r_\pi \approx 2\beta_{01} r_{\pi 2} \tag{22.a}$$

$$g_m \approx \frac{g_{m2}}{2} \tag{22.b}$$

$$r_o \approx \frac{2}{3} r_{o2} \tag{22.c}$$