ESERCIZIO: MODELLO A PARAMETRI [g]

Descrizione del problema

Il circuito di Fig. 1, rappresenta un amplificatore che alimenta un carico resistivo R_L. determinare la rappresentazione a parametri [g] di tale amplificatore in modo da ottenere la rappresentazione finale di Fig. 2. Determinare inoltre le espressioni dei parametri [g] nel caso in cui R_o sia infinita. In tale situazione, calcolare il guadagno di tensione $A_v = v_o/v_s$ e la resistenza di ingresso $R_{in} = v_1/i_1$ (vista dal generatore di sorgente reale) sia direttamente dallo schema di Fig. 1 che dallo schema di Fig. 2.

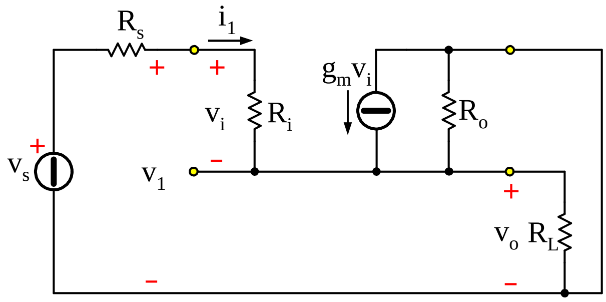

Fig. 1– Circuito amplificatore

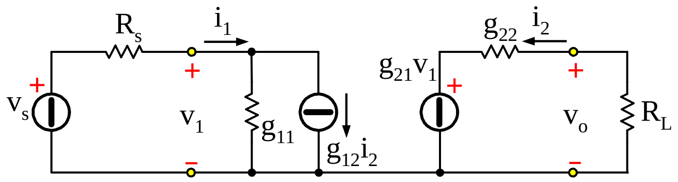

Fig. 2– Circuito equivalente relativo all'amplificatore di Fig. 1 che utilizza un modello del doppio bipolo a parametri g

Soluzione

La rappresentazione a parametri [g] di un quadripolo è caratterizzata dalle seguenti equazioni (con riferimento ai simboli della Fig. 2):

(1)
$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}i_2 \\ v_o = g_{21}v_1 + g_{22}i_2 \end{cases}$$

da cui si ricavano le seguenti definizioni dei parametri [g]:

(2)
$$g_{11} = \frac{i_1}{v_1}\Big|_{i_2=0}$$

(3)
$$g_{12} = \frac{i_1}{i_2}\Big|_{v_1=0}$$

(4)
$$g_{21} = \frac{v_o}{v_1}\Big|_{i_2=0}$$

(5)
$$g_{22} = \frac{v_o}{i_2}\Big|_{v_1=0}$$

Ridisegnamo inizialmente il circuito di Fig. 1 come mostrato in Fig. 3. Applichiamo ora le definizioni (2)-(5).

Determinazione di g_{11}. Il *paramet*ro g_{11} rappresenta la conduttanza di ingresso quando viene annullata la corrente di uscita. Il circuito da analizzare è pertanto quello mostrato in Fig. 4 nel quale si è staccato il carico in modo da porsi nella condizione $i_2 = 0$ e si è applicato un generatore di tensione v_1 in ingresso. Da questo schema si calcola il rapporto i_1/v_1 come segue:

(6) $$v_1 = v_i + R_o\left(i_1 + g_m v_i\right)$$

(7) $$v_i = R_i i_1$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima, otteniamo:

(8) $$g_{11} = \frac{1}{R_i + R_o\left(1 + g_m R_i\right)}$$

Determinazione di g_{12}. Il parametro g_{12} rappresenta il guadagno di corrente inverso quando viene cortocircuitata la porta di ingresso. Il circuito da analizzare è mostrato in Fig. 5a. Da questo schema otteniamo:

(9) $$v_i = -R_o\left(i_1 + i_2 + g_m v_i\right)$$

(10) $$v_i = R_i i_1$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima otteniamo:

(11) $$g_{12} = -\frac{R_o}{R_i + R_o\left(1 + g_m R_i\right)} = -R_o g_{11}$$

Determinazione di g_{21}. Il parametro g_{21} rappresenta il guadagno di tensione diretto a vuoto. Il circuito da analizzare rimane quello di Fig. 4. Da questo schema calcoliamo:

(12) $$v_o = R_o\left(i_1 + g_m R_i i_1\right)$$

ma, essendo l'uscita a vuoto, possiamo scrivere:

(13) $$i_1 = g_{11} v_1$$

per cui sostituendo nella (12) otteniamo:

(14) $$g_{21} = \frac{R_o\left(1 + g_m R_i\right)}{R_i + R_o\left(1 + g_m R_i\right)}$$

Determinazione di g_{22}. Il parametro g_{22} rappresenta la resistenza di uscita quando viene cortocircuitata la porta di ingresso. Il circuito da analizzare rimane quello di Fig. 5a:

(15) $$v_o = \left(R_o // R_i\right)\left(i_2 - g_m v_o\right)$$

Dopo alcuni passaggi otteniamo:

(16) $$g_{22} = \frac{R_o // R_i}{1 + g_m R_o // R_i} = R_o // R_i // \frac{1}{g_m}$$

E' interessante sottolineare come questo risultato si possa ricavare per ispezione diretta della rete di Fig. 5 osservando che il generatore di corrente comandato in tensione, che dipende dalla tensione ai suoi capi, è equivalente ad una resistenza di valore $1/g_m$. Pertanto il circuito di Fig. 5a, può essere semplificato come mostrato in Fig. 5b da cui si evince direttamente la (16). Dallo stesso circuito è possibile ricavare il parametro g_{12} mediante la formula del partitore resistivo:

(17) $$g_{12} = -\frac{R_o // \frac{1}{g_m}}{R_i + R_o // \frac{1}{g_m}} = -\frac{\frac{R_o}{1 + g_m R_o}}{R_i + \frac{R_o}{1 + g_m R_o}} = -\frac{R_o}{R_i\left(1 + g_m R_o\right) + R_o}$$

Tale relazione coincide con la (11), come si può facilmente osservare.

Determinazione dei parametri [g] per $R_o = \infty$.

(18) $$\lim_{R_o \to \infty} g_{11} = 0$$

(19) $$\lim_{R_o \to \infty} g_{12} = -\frac{1}{1 + g_m R_i}$$

(20) $$\lim_{R_o \to \infty} g_{21} = 1$$

(21) $$\lim_{R_o \to \infty} g_{22} = \frac{R_i}{1+g_m R_i}$$

Calcolo della resistenza di ingresso dallo schema di Fig. 2 *sapendo che $g_{11} = 0$*

Per calcolare la resistenza d'ingresso vista dal generatore reale di sorgente (a valle, quindi, della resistenza di sorgente R_s), lo schema da analizzare è mostrato in Fig. 6, dove si è applicato il generatore di test che impone la tensione v_1:

(22) $$R_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{v_1}{g_{12} i_2} = \frac{v_1}{-g_{12} v_1}\left(\frac{g_{22}+R_L}{g_{21}}\right) = R_i + R_L(1+g_m R_i)$$

Calcolo del guadagno di tensione dallo schema di Fig. 2 *sapendo che $g_{11} = 0$*

(23) $$A_v = \frac{v_o}{v_s} = \frac{v_o}{v_1}\frac{v_1}{v_s}$$

Il rapporto v_o/v_1 si determina direttamente dalla Fig. 2 osservando che la tensione di uscita si ottiene direttamente dal partitore resistivo tra g_{22} e R_L:

(24) $$\frac{v_o}{v_1} = \frac{R_L}{g_{22}+R_L} g_{21}$$

Per quanto riguarda, invece, il rapporto v_1/v_s, si può osservare come l'amplificatore di Fig. 2, visto dalla sua porta d'ingresso, sia equivalente alla resistenza R_{in} sopra calcolata. Pertanto, possiamo scrivere:

(25) $$\frac{v_1}{v_s} = \frac{R_{in}}{R_S + R_{in}}$$

Sostituendo la (24) e la (25) nella (23) otteniamo:

(26) $$A_v = \frac{R_L}{g_{22}+R_L} g_{21} \frac{R_{in}}{R_S+R_{in}} = \frac{R_L(1+g_m R_i)}{R_S + R_i + R_L(1+g_m R_i)}$$

E' lasciato allo studente il compito di verificare che le stesse relazioni si possono ricavare direttamente dallo schema di Fig. 1.

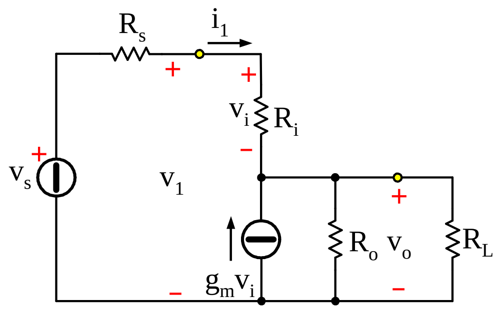

Fig. 3– Circuito di Fig. 1 ridisegnato

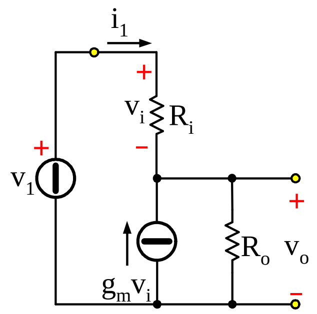

Fig. 4– Circuito equivalente per la determinazione dei parametri g_{11} e g_{21}

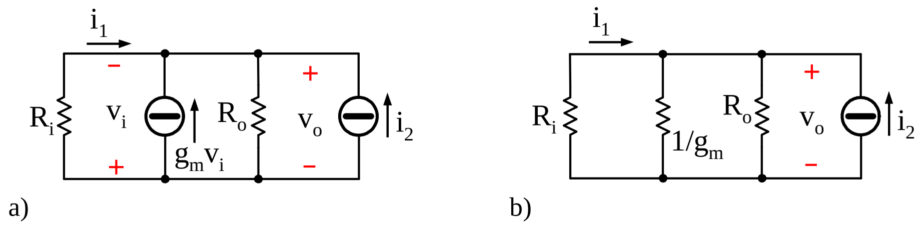

Fig. 5– Circuiti equivalenti per la determinazione dei parametri g_{12} e g_{22}

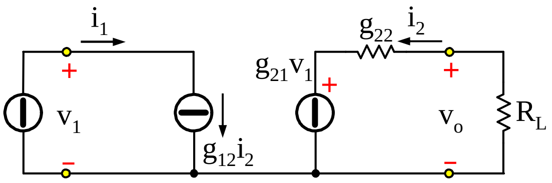

Fig. 6– Circuito equivalente per il calcolo della resistenza d’ingresso R_{in} con $g_{11} = 0$