SOMMATORE ALGEBRICO

(Esercizio: n°P5.7 pag. 261, Spencer, Ghausi: Introduction to Electronic Circuit Design)

Descrizione del problema

Si vuole realizzare una somma algebrica tra tre segnali v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, mediante l'utilizzo di un unico amplificatore operazionale. Si disegni il circuito e si determinino i valori delle resistenze da utilizzarsi per ottenere i guadagni desiderati.

Dati: $v_o = A_1 v_{i1} + A_2 v_{i2} + A_3 v_{i3}$, con $A_1 = +3$, $A_2 = -2$, $A_3 = +5$

Soluzione

Possiamo realizzare la somma algebrica di tre segnali mediante un circuito sommatore come mostrato in Fig. 1, in cui il segnale v_{i2} viene applicato al morsetto invertente in quanto il guadagno relativo desiderato risulta negativo. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti possiamo scrivere:

$$(1)\quad v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_{i2} + \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{R_4}{R_4+R_3} v_{i1} + \frac{R_3}{R_4+R_3} v_{i3}\right) = -\frac{R_2}{R_1} v_{i2} + \left(\frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{R_4}{R_3}}\right)\left(\frac{R_4}{R_3} v_{i1} + v_{i3}\right)$$

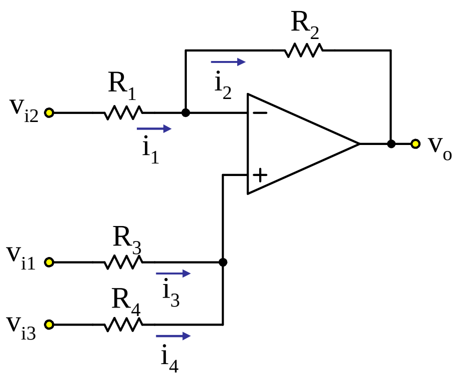

Fig. 1– Circuito per la somma algebrica di tre segnali

Si vede immediatamente che nell'equazione (1) abbiamo solamente due gradi di libertà, ovverosia, i rapporti R_2/R_1 e R_4/R_3. Pertanto, non possiamo, in generale, soddisfare la specifica relativa ai tre diversi guadagni. Per introdurre un nuovo grado di libertà modifichiamo il circuito con l'aggiunta della resistenza R_5 (vedi Fig. 2) che influenza il guadagno A_1 e A_3 ma non il guadagno A_2, come si può osservare dalla seguente espressione della tensione di uscita:

$$(2)\quad \begin{aligned} v_o &= -\frac{R_2}{R_1} v_{i2} + \left(1+\frac{R_2}{R_1 // R_5}\right)\left(\frac{R_4}{R_4+R_3} v_{i1} + \frac{R_3}{R_4+R_3} v_{i3}\right) \\ &= -\frac{R_2}{R_1} v_{i2} + \left(\frac{1+\frac{R_2}{R_1 // R_5}}{1+\frac{R_4}{R_3}}\right)\left(\frac{R_4}{R_3} v_{i1} + v_{i3}\right) \end{aligned}$$

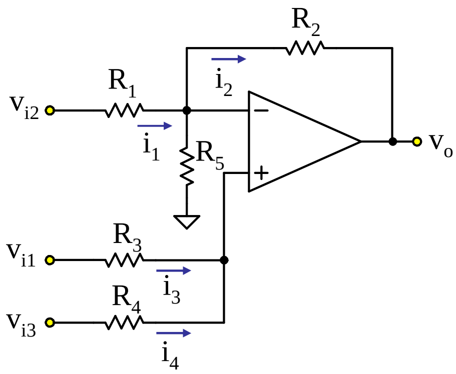

Fig. 2– Circuito sommatore modificato con l'aggiunta di R_5 tra il morsetto invertente e massa

Confrontando la (2) con l'espressione desiderata della tensione di uscita, ricaviamo immediatamente il rapporto R_2/R_1:

(3) $$\frac{R_2}{R_1} = |A_2| = 2$$

Chiamando

(4) $$k = 1 + \frac{R_2}{R_1 // R_5}, \; x = \frac{R_4}{R_3}$$

I guadagni A_1 e A_3 sono dati dalle seguenti espressioni:

(5) $$\begin{cases} k\dfrac{x}{1+x} = |A_1| \\ k\dfrac{1}{1+x} = |A_3| \end{cases}$$

Da cui si ricava:

(6) $$\begin{cases} x = \left|\dfrac{A_1}{A_3}\right| \\ k = |A_3| + |A_1| \end{cases}$$

Per cui x = 3/5 e k = 8. Dalla (6) ricaviamo:

(7) $$\frac{R_1}{R_5} = \frac{|A_1| + |A_3| - 1}{|A_2|} - 1 = 5/2$$

E' interessante osservare che l'espressione (7) potrebbe, per certi valori dei guadagni, condurre ad un risultato negativo, rendendo la soluzione non fisicamente realizzabile. Infatti, il rapporto R_1/R_5 risulta positivo solo se vale la seguente diseguaglianza:

(8) $$|A_1| + |A_3| - |A_2| > 1$$

In definitiva, una possibile scelta di valori di resistenze è la seguente: $R_1 = R_3 = 10$ kΩ, $R_2 = 20$ kΩ, $R_4 = 6$ kΩ, $R_5 = 4$ kΩ.

In alternativa all'aggiunta di R_5 tra il morsetto invertente e massa, è possibile connettere una resistenza tra il morsetto non invertente e massa, come mostrato in Fig. 3. In questo caso, applicando il principio di sovrapposizione degli effetti otteniamo:

(9) $$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_{i2} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{1}{\dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_5}}\right)\left(\frac{v_{i1}}{R_3} + \frac{v_{i3}}{R_4}\right)$$

Da cui si ottiene ancora la stessa condizione (3), mentre i guadagni A_1 e A_3 si calcolano dalle seguenti espressioni:

(10)
$$\begin{cases} \left(\dfrac{1+|A_2|}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}} \right) \dfrac{1}{R_3} = |A_1| \\ \left(\dfrac{1+|A_2|}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_5}} \right) \dfrac{1}{R_4} = |A_3| \end{cases}$$

Da questo sistema si ricava:

(11)
$$\begin{cases} \dfrac{R_4}{R_3} = \left| \dfrac{A_1}{A_3} \right| \\ R_5 = \dfrac{R_4}{\dfrac{1+|A_2|}{|A_3|} - \left| \dfrac{A_1}{A_3} \right| - 1} \end{cases}$$

Anche in questo caso, una opportuna combinazione di guadagni porta a valori per R_5 negativi e, quindi, non fisicamente realizzabili. In particolare, affinché la soluzione sia fisicamente realizzabile, deve essere soddisfatta la seguente diseguaglianza:

(12)
$$|A_1| + |A_3| - |A_2| < 1$$

Notiamo che tale condizione è complementare alla (8), il che significa che solo uno dei due circuiti di Fig. 2 e Fig. 3 è fisicamente realizzabile per una data combinazione dei tre guadagni specificati. Per esempio, le specifiche date danno come risultato della (11) una R_5 pari a -6 kΩ con gli stessi valori scelti per R_1, R_2, R_3 e R_4 del caso precedente.

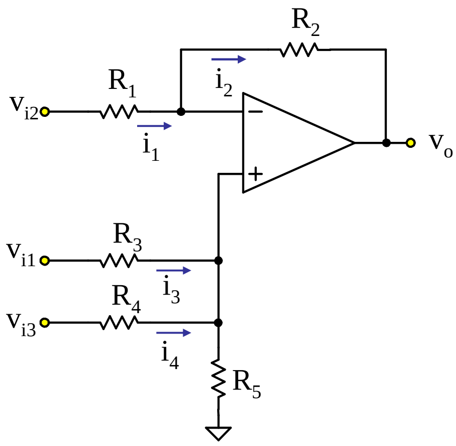

Fig. 3– Circuito sommatore modificato con l’aggiunta di R_5 tra il morsetto non invertente e massa

Gli esempi qui sopra analizzati ci portano ad ipotizzare che, combinando gli schemi di Fig. 2 e Fig. 3 secondo quanto mostrato in Fig. 4, si possa ottenere un circuito realizzabile per qualsiasi combinazione dei tre guadagni A_1, A_2 e A_3. Analizzando mediante il principio di sovrapposizione degli effetti il circuito di Fig. 4 si ottiene la seguente espressione per la tensione di uscita:

(13)
$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_{i2} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1 // R_5} \right) \left(\frac{1}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_6}} \right) \left(\frac{v_{i1}}{R_3} + \frac{v_{i3}}{R_4} \right)$$

I guadagni rispetto ai diversi ingressi sono:

$$\text{(14)}\qquad \begin{cases} \dfrac{R_2}{R_1} = |A_2| \\ \left(\dfrac{k}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_6}} \right) \dfrac{1}{R_3} = |A_1| \\ \left(\dfrac{k}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_4}+\dfrac{1}{R_6}} \right) \dfrac{1}{R_4} = |A_3| \end{cases}$$

con k definito come in (4). E' immediato osservare che valgono ancora la (3) e la prima delle (11). Prendendo poi, per esempio, la seconda equazione, possiamo scrivere:

$$1+|A_2|+|A_2|\frac{R_1}{R_5} = |A_1|\left(1+\frac{|A_3|}{|A_1|}+\frac{R_3}{R_6}\right)$$

$$\text{(15)}\qquad \frac{R_1}{R_5} = \frac{|A_1|}{|A_2|}\left(1+\frac{|A_3|}{|A_1|}+\frac{R_3}{R_6}\right) - \frac{1+|A_2|}{|A_2|}$$

Tale quantità deve essere positiva, condizione che comporta il seguente vincolo per il rapporto R_3/R_6:

$$\text{(16)}\qquad \frac{R_3}{R_6} > \frac{1+|A_2|-|A_1|-|A_3|}{|A_1|}$$

Una volta soddisfatta tale condizione mediante un'opportuna scelta dei valori delle resistenze, il rapporto R_1/R_5 si ricava dalla (15).

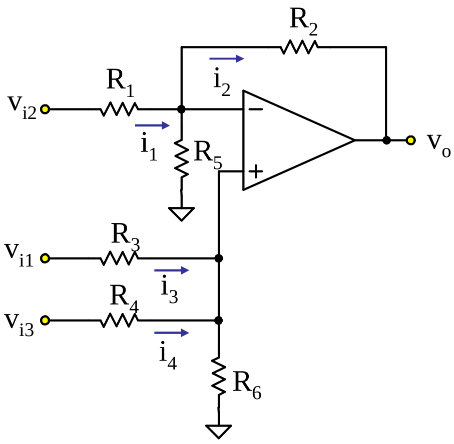

Fig. 4– Circuito sommatore generalizzato

Se si rilassa la specifica relativa all'impiego di un unico amplificatore operazionale, le possibili soluzioni aumentano. Per esempio, volendo impiegare solo amplificatori in configurazione invertente, un possibile schema realizzativo è quello mostrato in Fig. 5, per il quale possiamo scrivere:

$$\text{(17)}\qquad v_{o1} = -\frac{R_3}{R_2}v_{i1} - \frac{R_3}{R_1}v_{i3}$$

(18) $$v_{o1} = -\frac{R_5}{R_4} v_{o1} - \frac{R_5}{R_6} v_{i2} = \frac{R_5}{R_4}\frac{R_3}{R_2} v_{i1} + \frac{R_5}{R_4}\frac{R_3}{R_1} v_{i3} - \frac{R_5}{R_6} v_{i2}$$

Da cui si ottiene:

(19) $$\begin{cases} \frac{R_5}{R_6} = |A_2| \\ \frac{R_5}{R_4}\frac{R_3}{R_2} = |A_1| \\ \frac{R_5}{R_4}\frac{R_3}{R_1} = |A_3| \end{cases}$$

Per esempio, se si scelgono $R_3 = R_4$ le altre resistenze si calcolano nel seguente modo:

(20) $$\begin{cases} R_5 = |A_2| R_6 \\ R_2 = \frac{R_5}{|A_1|} \\ R_1 = \frac{R_5}{|A_3|} \end{cases}$$

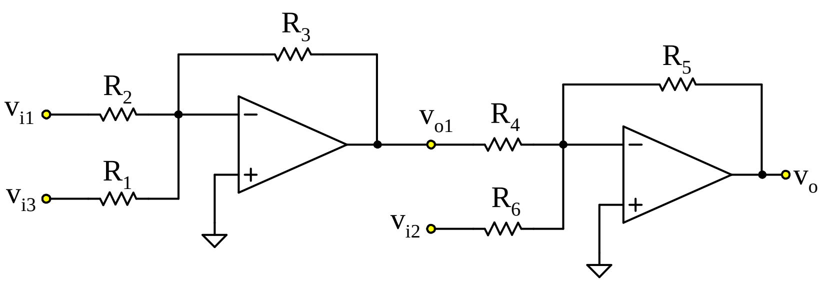

Fig. 5– Circuito alternativo utilizzando due amplificatori operazionali in configurazione invertente