

## ESERCIZIO RADDRIZZATORE A SEMIONDA DI PRECISIONE

### Descrizione del problema

Il circuito mostrato in Fig. 1 rappresenta un limitatore di precisione connesso ad un carico rappresentato dalla resistenza  $R_L$ . Assumendo diodi e amplificatore operazionale ideali, si ricavi la transcaratteristica  $V_O = f(V_{IN})$ , indicando chiaramente i punti di spezzamento e le pendenze dei vari tratti e giustificando le risposte. Si ripeta l'analisi utilizzando per i diodi un modello a generatore di tensione costante pari a  $V_{on}$  (vedi Fig. 2), e considerando un guadagno in continua  $A_0$  finito dell'amplificatore operazionale.

Dati:  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_L = 8.2 \text{ k}\Omega$ ,  $V_{on} = 0.7 \text{ V}$ ,  $A_{0dB} = 86 \text{ dB}$

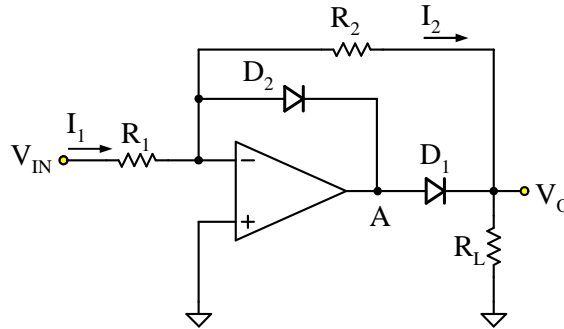


Fig. 1– Raddrizzatore a semionda di precisione

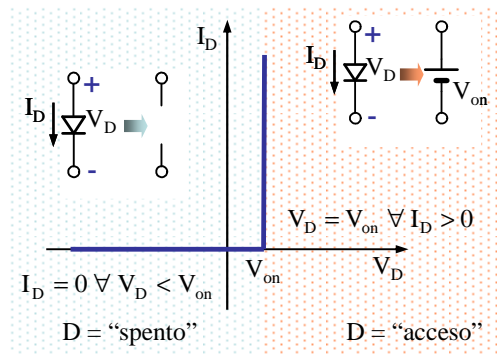


Fig. 2– Approssimazione lineare a tratti della caratteristica  $I_d$ - $V_d$  del diodo

### Soluzione

**Componenti ideali.** Essendo l'amplificatore operazionale ideale, le correnti assorbite ai morsetti di ingresso sono nulle e la tensione differenziale di ingresso è nulla. Di conseguenza, il morsetto invertente dell'amplificatore operazionale rappresenta un punto di "massa virtuale". Iniziamo l'analisi del circuito ipotizzando lo stato di ciascun diodo.

a) Hp:  $D_1 = \text{"spento"}\text{"}$ ,  $D_2 = \text{"acceso"}\text{"}$

Il circuito lineare equivalente all'ipotesi effettuata è riportato in Fig. 3a. Essendo  $D_2$  un cortocircuito, la tensione di uscita  $V_A$  dell'operazionale coincide con la tensione al morsetto invertente ed è, quindi, pari a zero. Anche la tensione di uscita  $V_O$  è nulla in quanto la corrente  $I_2$  è nulla (la tensione ai capi della serie  $R_2 + R_L$  è nulla). Di conseguenza la tensione ai capi del diodo  $D_1$  risulta anch'essa nulla, ed esso si trova a lavorare in un punto di lavoro corrispondente all'origine del diagramma  $I_{D1}$ - $V_{D1}$ . Di conseguenza, il suo stato può essere indifferentemente considerato spento, come ipotizzato, oppure acceso. Infatti, se si parte dall'ipotesi di diodi entrambi accesi (vedi Fig. 3b), la corrente  $I_{D1} = I_L - I_2$  risulta ancora nulla, essendo singolarmente nulle le tensioni ai capi di  $R_2$  e  $R_L$ . Tale ambiguità, scompare quando si utilizza un modello più accurato per il diodo oppure quando si considera un guadagno finito per l'amplificatore operazionale, come verrà dimostrato nella seconda parte dell'esercizio. Verifichiamo ora lo stato del diodo  $D_2$  determinando la corrente

che vi scorre. Essendo nulla la corrente  $I_2$ , la  $I_{D2}$  coincide con la corrente  $I_1$  fornita dal generatore di ingresso, che è data dalla seguente espressione (il morsetto invertente dell'amplificatore operazionale è un punto di massa virtuale ed è, quindi, a potenziale zero):

$$(1) \quad I_{D2} = \frac{V_{IN}}{R_1} = I_1$$

per cui una corrente  $I_{D2}$  positiva impone una tensione di ingresso positiva. Riassumendo, per  $V_{IN} > 0$ ,  $D_2$  è in conduzione mentre  $D_1$  è spento e la tensione di uscita è nulla.

b) Hp:  $D_1 = \text{"acceso"} , D_2 = \text{"spento"}$

In questa situazione il circuito equivalente, mostrato in Fig. 3c, rappresenta un amplificatore operazionale retroazionato in configurazione invertente (la resistenza di carico  $R_L$  non modifica la situazione in quanto l'amplificatore operazionale, essendo ideale, ha una resistenza di uscita nulla) per il quale vale la seguente relazione:

$$(2) \quad V_O = -\frac{R_2}{R_1} V_{IN} = -2V_{IN}$$

La tensione ai capi del diodo  $D_2$  risulta, quindi:

$$(3) \quad V_{D2} = -V_O = \frac{R_2}{R_1} V_{IN}$$

Affinchè l'ipotesi di diodo  $D_2$  spento sia verificata la sua tensione deve essere negativa, il che implica una tensione d'ingresso negativa. Per quanto riguarda il diodo  $D_1$ , la corrente che vi scorre risulta dalla seguente espressione:

$$(4) \quad I_{D1} = \frac{V_O}{R_L} + \frac{V_O}{R_2} = -\frac{V_{IN}}{R_1} \left( 1 + \frac{R_2}{R_L} \right)$$

L'ipotesi di diodo acceso richiede che la corrente nel diodo risulti positiva, condizione verificata per  $V_{IN}$  negativa. Pertanto, possiamo concludere che tale stato topologico è verificato per tensioni di ingresso negative. In definitiva, la transcaratteristica risulta come riportato in Fig. 4, dove si evidenzia l'unico punto di spezzamento  $P_1$  nell'origine degli assi.

Per completare l'analisi, analizziamo anche l'ultimo stato topologico possibile relativo alla condizione in cui entrambi i diodi sono spenti, che dà luogo al circuito equivalente di Fig. 3d. Anche in questo caso, la condizione di idealità dell'amplificatore operazionale conduce ad una situazione ambigua in quanto, essendo l'amplificatore operazionale a catena aperta ed avendo guadagno infinito, la sua tensione di uscita può assumere un qualsiasi valore positivo o negativo polarizzando direttamente, nel primo caso, il diodo  $D_1$ , oppure, nel secondo caso, il diodo  $D_2$ .

*Componenti reali.* Considerando un guadagno in continua finito per l'amplificatore operazionale, non possiamo più assumere che la tensione tra i suoi morsetti d'ingresso sia nulla. Pertanto, il modello da utilizzare per l'amplificatore operazionale è quello di un generatore di tensione di guadagno  $A_0$  comandato dalla tensione differenziale d'ingresso  $V_i$ , come risulta evidente dai circuiti equivalenti di seguito riportati. Anche in questo caso, prima di analizzare il circuito per diverse condizioni dei diodi  $D_1$  e  $D_2$ , calcoliamo il guadagno in continua  $A_0$ :

$$(5) \quad A_0 = 10^{\frac{A_{0dB}}{20}} = 19953$$

a) Hp:  $D_1 = \text{"spento"} , D_2 = \text{"acceso"}$

Il corrispondente circuito lineare equivalente è riportato in Fig. 5a nell'ipotesi, da verificare, che siano contemporaneamente verificate le condizioni  $I_{D2} > 0$  e  $V_{D1} < V_{on}$ . Dall'analisi del circuito ricaviamo le seguenti relazioni:

$$(6) \quad I_1 = \frac{V_{IN} - V_i}{R_1}$$

$$(7) \quad V_i = V_{on} - A_0 V_i$$

$$(8) \quad V_O = \frac{R_L}{R_2 + R_L} V_i$$

Dalla (7) ricaviamo la tensione differenziale d'ingresso dell'amplificatore operazionale:

$$(9) \quad V_i = \frac{V_{on}}{1 + A_0} = 35.08 \mu V$$

che sostituita nella (8) ci permette di calcolare l'espressione della tensione di uscita:

$$(10) \quad V_O = \frac{R_L}{R_2 + R_L} \frac{V_{on}}{1 + A_0} = V_{O1} = 10.2 \mu V$$

Come si può osservare, la tensione di uscita in questa situazione, che nel caso di componenti ideali sarebbe nulla, ha un valore non nullo ancorché molto piccolo, inversamente proporzionale al guadagno in continua dell'amplificatore operazionale. Determiniamo ora la condizione a cui deve sottostare la tensione d'ingresso affinché lo stato topologico qui descritto sia verificato. La tensione ai capi del diodo spento risulta:

$$(11) \quad V_{D1} = -A_0 V_i - V_O = -\frac{A_0}{1 + A_0} V_{on} - \frac{R_L}{R_2 + R_L} \frac{V_{on}}{1 + A_0} \cong -0.7 V$$

Tale tensione, essendo negativa e indipendente dalla tensione d'ingresso risulta sempre minore di  $V_{on}$ . La corrente nel diodo  $D_2$  risulta, invece, dalla seguente espressione:

$$(12) \quad I_{D2} = I_1 - I_2 = \frac{V_{IN} - V_i}{R_1} - \frac{V_i}{R_2 + R_L} = \frac{V_{IN}}{R_1} - \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_L} \right) \frac{V_{on}}{1 + A_0}$$

Affinché il diodo  $D_2$  risulti effettivamente in conduzione, la sua corrente deve essere positiva. Pertanto, la tensione d'ingresso  $V_{IN}$  deve soddisfare la seguente condizione:

$$(13) \quad V_{IN} > V_{T1} = \frac{V_{on}}{1 + A_0} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2 + R_L} \right) = 47.52 \mu V$$

Riassumendo, per  $V_{IN} > V_{T1}$  entrambe le ipotesi sullo stato dei diodi risultano verificate. Quando la tensione d'ingresso diventa inferiore a  $V_{T1}$ , ci si aspetta che il diodo  $D_2$ , inizialmente in conduzione, si spenga dato che la sua corrente tende a diventare negativa, dando luogo al circuito equivalente riportato in Fig. 5b.

b) Hp:  $D_1 = \text{"spento"} , D_2 = \text{"spento"}$

Dall'analisi del circuito di Fig. 5b, si ricavano le seguenti relazioni:

$$(14) \quad V_i = V_{IN} \frac{R_2 + R_L}{R_1 + R_2 + R_L}$$

$$(15) \quad V_O = V_{IN} \frac{R_L}{R_1 + R_2 + R_L} = m_1 V_{IN} = 0.2147 \cdot V_{IN}$$

La tensione ai capi del diodo  $D_2$  risulta (utilizzando la (14)):

$$(16) \quad V_{D2} = V_i + A_0 V_i = (1 + A_0) \frac{R_2 + R_L}{R_1 + R_2 + R_L} V_{IN}$$

La condizione  $V_{D2} < V_{on}$ , che garantisce lo spegnimento del diodo  $D_2$ , comporta  $V_{IN} < V_{T1}$ , come si evince direttamente dalla (16). Per quanto riguarda, invece, il diodo  $D_1$ , la sua tensione vale:

$$(17) \quad \begin{aligned} V_{D1} &= -A_0 V_i - V_O = -A_0 \frac{R_2 + R_L}{R_1 + R_2 + R_L} V_{IN} - \frac{R_L}{R_1 + R_2 + R_L} V_{IN} \\ &= -\frac{R_L + A_0(R_2 + R_L)}{R_1 + R_2 + R_L} V_{IN} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, la condizione  $V_{D1} < V_{on}$ , che garantisce lo spegnimento del diodo  $D_1$ , comporta la seguente condizione sulla tensione d'ingresso:

$$(18) \quad V_{IN} > V_{T2} = -V_{on} \left( \frac{R_1 + R_2 + R_L}{R_L + A_0(R_2 + R_L)} \right) = -47.52 \mu V$$

Si osservi che  $V_{T2} \approx -V_{T1}$  essendo  $A_0 \gg 1$ . In definitiva, tale stato topologico risulta verificato per  $V_{T2} < V_{IN} < V_{T1}$ . Quando la tensione d'ingresso diventa minore di  $V_{T2}$ , il diodo  $D_1$  diventa polarizzato direttamente ed entra in conduzione, dando luogo allo stato topologico descritto dalla Fig. 5c.

c) Hp:  $D_1 = \text{"acceso"}, D_2 = \text{"spento"}$

Dall'analisi del circuito di Fig. 5c, si ricavano le seguenti relazioni:

$$(19) \quad I_1 = \frac{V_{IN} - V_i}{R_1}$$

$$(20) \quad I_2 = \frac{V_i - V_O}{R_2}$$

$$(21) \quad V_O = -A_0 V_i - V_{on}$$

Dalla condizione  $I_1 = I_2$ , otteniamo:

$$(22) \quad V_i = V_{IN} \frac{R_2}{R_1 + R_2} + V_O \frac{R_1}{R_1 + R_2} = V_{IN} \frac{R_2}{R_1} \beta + V_O \beta$$

dove

$$(23) \quad \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Sostituendo l'espressione di  $V_i$  data dalla (22) nella (21), otteniamo la seguente espressione della tensione di uscita:

$$(24) \quad V_O = -\frac{R_2}{R_1} \frac{A_0 \beta}{1 + A_0 \beta} V_{IN} - \frac{V_{on}}{1 + A_0 \beta} = m_2 V_{IN} + q_2$$

Dove

$$(25) \quad \begin{cases} m_2 = -\frac{R_2}{R_1} \frac{A_0 \beta}{1 + A_0 \beta} \\ q_2 = -\frac{V_{on}}{1 + A_0 \beta} \end{cases}$$

Dai dati del problema si ottiene  $m_2 = -2$ ,  $q_2 = -105.2 \mu V$ .

La corrente nel diodo  $D_1$ , supposto in conduzione, risulta data dalla seguente espressione:

$$(26) \quad I_{D1} = I_L - I_2 = \frac{V_O}{R_L} - \frac{V_i - V_O}{R_2}$$

Utilizzando le (22) e (24) e imponendo  $I_{D1} > 0$ , dopo alcuni passaggi algebrici otteniamo la condizione  $V_{IN} < V_{T2}$ , come ci si poteva aspettare dato che, dall'analisi della condizione precedente, il diodo  $D_1$  risultava accendersi proprio per  $V_{IN} < V_{T2}$ . Per quanto riguarda il diodo  $D_2$ , la tensione ai suoi capi risulta:

$$(27) \quad V_{D2} = V_i + A_0 V_i = (1 + A_0) \left( V_{IN} \frac{R_2}{R_1} + V_O \right) \beta$$

Imponendo che sia  $V_{D2} < V_{on}$ , si ottiene la seguente condizione:

$$(28) \quad V_{IN} < V_{on} \left( \frac{1}{1 + A_0} + 2 \frac{R_1}{R_2} \right)$$

che risulta sempre verificata per tutti i valori di  $V_{IN} < V_{T2}$  (si osservi che la tensione  $V_{T2}$  è negativa).

In definitiva, la transcaratteristica si modifica come mostrato in Fig. 7, dove si è posto in evidenza l'andamento in prossimità dell'origine degli assi evidenziando i punti di spezzamento  $P_1$  e  $P_2$ . Il valore di  $V_{O1}$  è dato dalla (10), mentre l'espressione di  $V_{O2}$  si ricava dalla (15) oppure dalla (24) considerando  $V_{IN} = V_{T2}$ , cioè:

$$(29) \quad V_{O2} = -V_{on} \left( \frac{R_L}{R_L + A_0(R_2 + R_L)} \right) = -10.2 \mu V$$

Le pendenze  $m_1$  e  $m_2$  si ricavano dalla (15) e (25) rispettivamente.

Dall'analisi sopra svolta si osserva come la condizione corrispondente ad entrambi i diodi accesi non venga mai soddisfatta. A scopo didattico, analizziamo anche tale situazione che dà luogo al circuito equivalente riportato in Fig. 6. Per questo circuito valgono le (6), (7) e (9) mentre la tensione di uscita è data dalla seguente espressione:

$$(30) \quad V_O = V_i - 2V_{on} = V_{on} \left( \frac{1}{1 + A_0} - 2 \right)$$

La corrente nel diodo  $D_1$  è data dalla seguente espressione:

$$(31) \quad I_{D1} = I_L - I_2 = \frac{V_O}{R_L} - \frac{2V_{on}}{R_2} = V_{on} \left( \frac{1}{R_L} \left( \frac{1}{1 + A_0} - 2 \right) - \frac{2}{R_2} \right)$$

E' immediato osservare che tale corrente è negativa, indipendentemente dai valori dei parametri del circuito. Pertanto l'ipotesi di entrambi i diodi in conduzione non si può verificare.

Infine, vale la pena osservare come, nel caso in cui il guadagno  $A_0$  diventi infinito oppure la caduta di tensione  $V_{on}$  ai capi dei diodi in conduzione si consideri nulla, i punti di spezzamento  $P_1$  e  $P_2$  convergono entrambi nell'origine, dando luogo alla caratteristica di trasferimento di Fig. 4 relativa a componenti ideali.

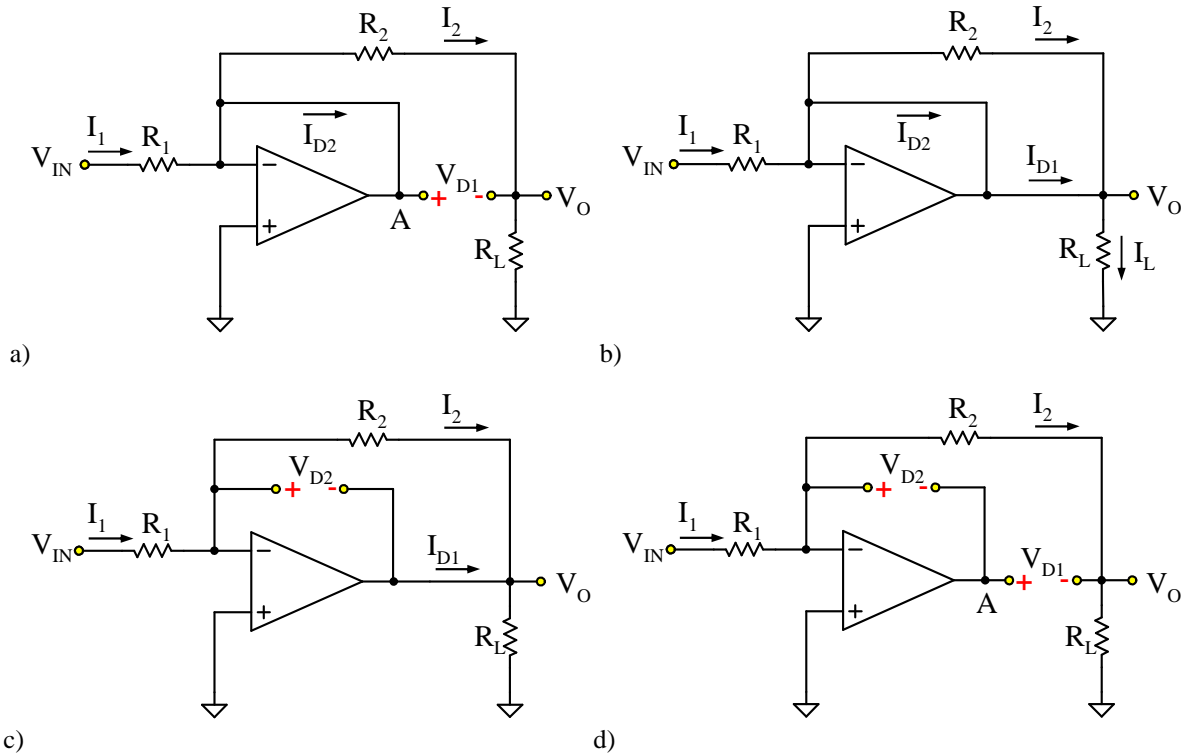


Fig. 3– Circuiti lineari equivalenti corrispondenti a diversi stati dei diodi  $D_1$  e  $D_2$ . a)  $D_1$  spento e  $D_2$  acceso; b)  $D_1$  e  $D_2$  accesi; c)  $D_1$  acceso e  $D_2$  spento; d)  $D_1$  e  $D_2$  spenti

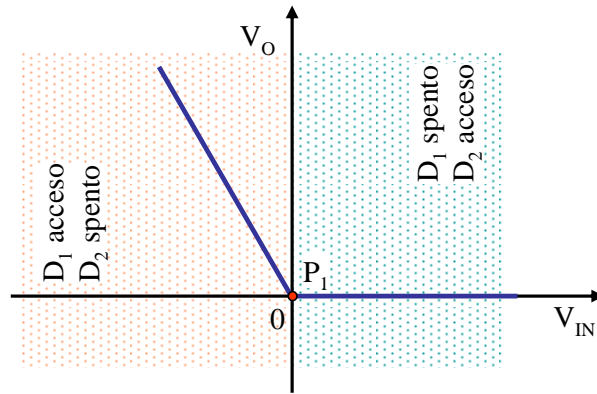


Fig. 4– Transcaratteristica complessiva nel caso di componenti ideali

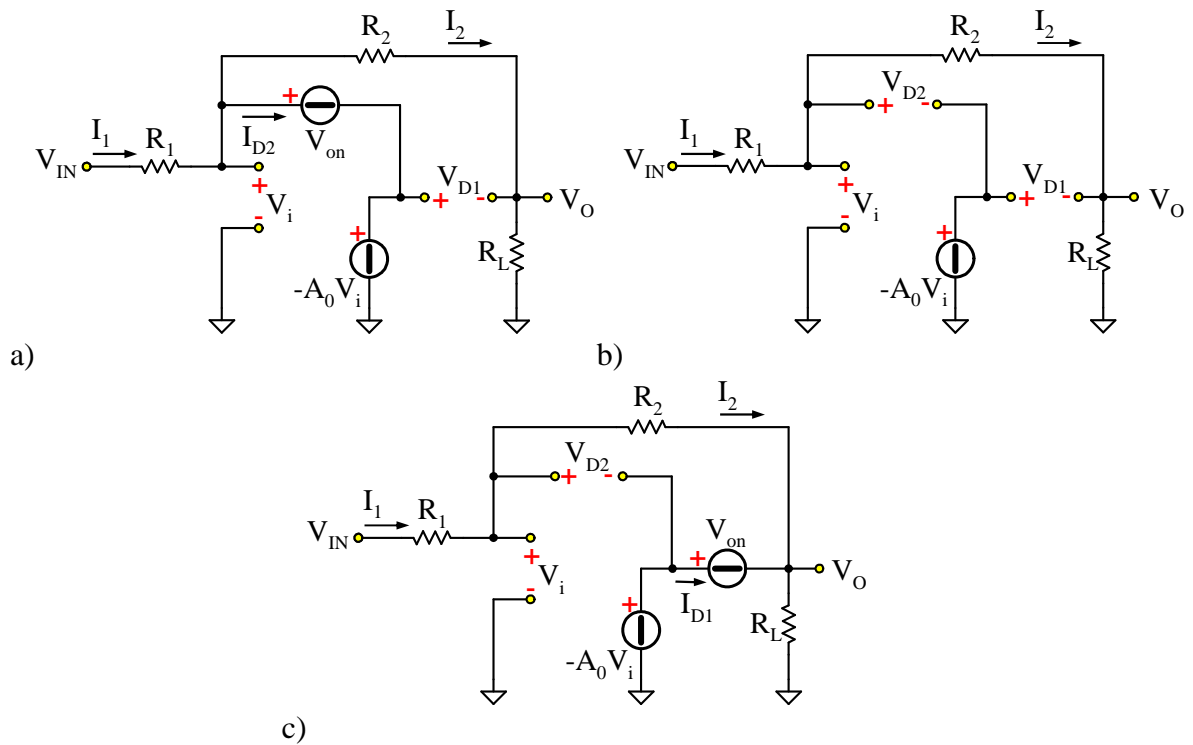


Fig. 5– Circuiti equivalenti corrispondenti a diverse condizioni dei diodi. a)  $D_1$  spento e  $D_2$  acceso; b)  $D_1$  e  $D_2$  spenti; c)  $D_1$  acceso e  $D_2$  spento

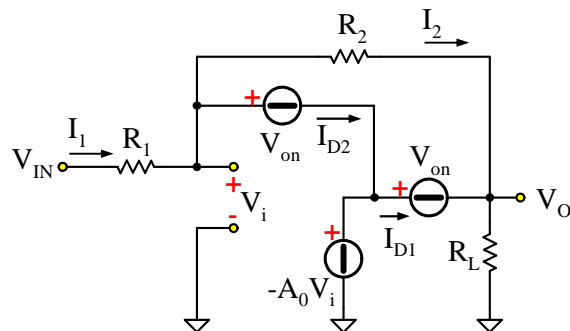


Fig. 6– Circuito equivalente corrispondente alla condizione in cui entrambi i diodi sono accesi

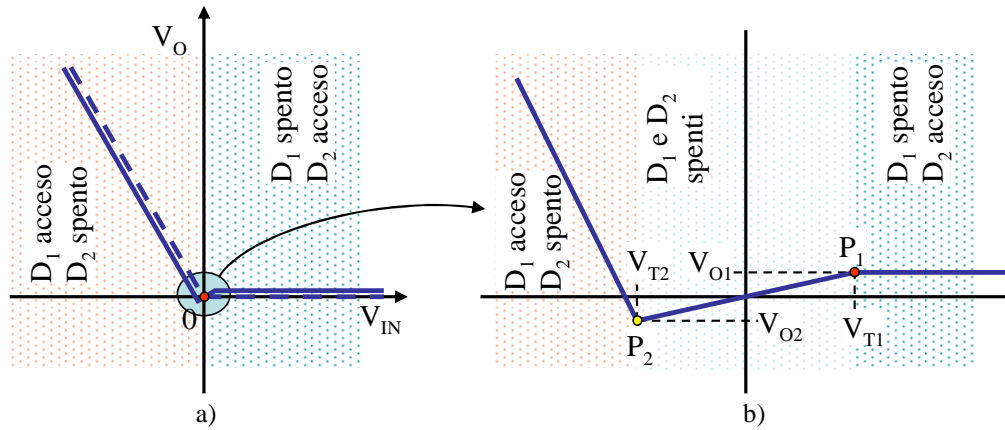


Fig. 7– Transcaratteristica complessiva nel caso di componenti reali. a) confronto con la transcaratteristica ideale (linea tratteggiata); b) ingrandimento nell'intorno dell'origine degli assi

#### Appendice I: confronto con il circuito raddrizzatore ad una semionda di tipo passivo

Risulta interessante confrontare le prestazioni del raddrizzatore a semionda qui studiato con il semplice circuito passivo mostrato in Fig. 8. Come si può notare dalla risposta del circuito ad una tensione sinusoidale d'ingresso, il diodo rimane contropolarizzato fintantoché la tensione d'ingresso non supera, in modulo, la tensione  $V_{on}$  del diodo. Pertanto, la tensione di uscita rimane a zero per un angolo  $\alpha$  dall'istante di attraversamento per lo zero della tensione d'ingresso pari a:

$$(32) \quad V_M \sin(\alpha) = V_{on} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{V_{on}}{V_M}\right)$$

Questo produce una distorsione della tensione di uscita che è tanto più accentuata quanto più l'ampiezza  $V_M$  della tensione da raddrizzare è comparabile con la caduta in conduzione del diodo. Confrontando la risposta del raddrizzatore di precisione di Fig. 1 alla stessa tensione sinusoidale d'ingresso riportata in Fig. 9, possiamo fare le seguenti osservazioni: la distorsione in corrispondenza dei passaggi per lo zero della tensione d'ingresso è ridotta grazie all'elevato guadagno dell'amplificatore operazionale (vedi (10) e (29)) e si traduce in scostamenti dall'andamento ideale di poche decine di microvolt; l'utilizzo dell'amplificatore operazionale permette di introdurre un guadagno in modulo maggiore o minore di uno (comunque negativo).

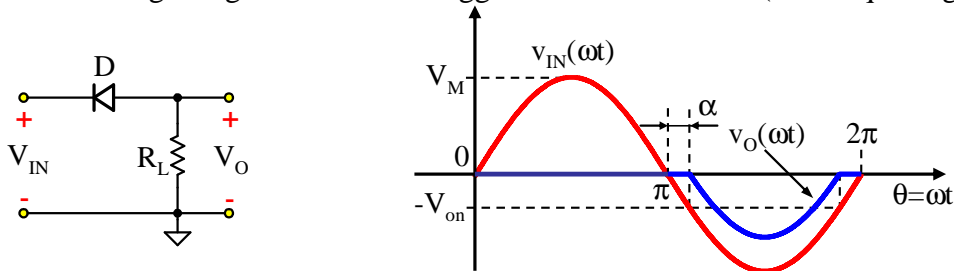


Fig. 8– Raddrizzatore ad una semionda elementare e sua risposta ad una tensione d'ingresso sinusoidale, assumendo per il diodo lo stesso modello a batteria costante  $V_{on}$  di Fig. 2

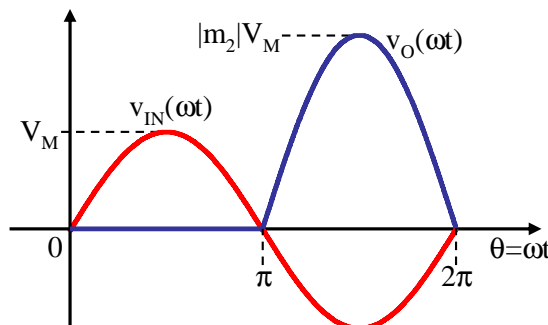


Fig. 9– Risposta ad una tensione d'ingresso sinusoidale, del raddrizzatore di precisione di Fig. 1

*Appendice II: analisi del circuito mediante la teoria della retroazione*

Il circuito di Fig. 5c relativo alla condizione  $D_1$  acceso e  $D_2$  spento può essere analizzato anche sfruttando la teoria della retroazione, mediante lo schema a blocchi equivalente di Fig. 10. Ricordiamo che la rappresentazione mediante schemi a blocchi dei sistemi retroazionati presuppone che i singoli blocchi siano non interagenti (l'uscita di ciascun blocco dipende unicamente dalla grandezza d'ingresso a quel blocco e dalla sua funzione di trasferimento), condizione garantita dal fatto che l'amplificatore operazionale considerato ha impedenza d'ingresso infinita e impedenza di uscita nulla. Tale schema a blocchi descrive esattamente le relazioni (22) e (24) precedentemente ricavate ed ha il pregio di mettere in evidenza come la caduta di tensione  $V_{on}$  ai capi del diodo in conduzione  $D_1$  si configuri come un disturbo esterno, che produce una deviazione della tensione di uscita dal suo valore ideale. Tuttavia, essendo questo disturbo iniettato all'interno dell'anello di retroazione composto dal guadagno  $A_0$  dell'amplificatore operazionale e dalla rete di retroazione  $\beta$ , il suo effetto sulla tensione di uscita  $V_O$  risulta attenuato dalla differenza di anello  $1+A_0\beta$ , come è peraltro evidente dalla (24).

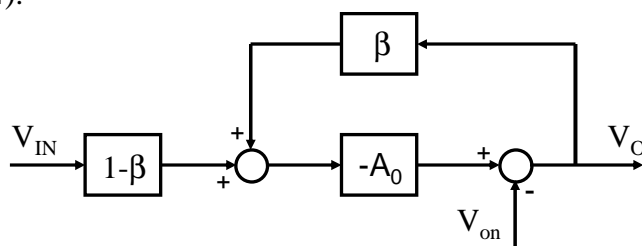


Fig. 10– Schema a blocchi relativo al circuito di Fig. 5c