STIMA DELLE FREQUENZE DI TAGLIO INFERIORE E SUPERIORE CON IL METODO DELLE COSTANTI DI TEMPO DI CORTO CIRCUITO (SCTC) E DI CIRCUITO APERTO (OCTC)

(G.Spiazzi)

Come abbiamo visto a lezione, è possibile suddividere lo studio della risposta in frequenza di un amplificatore analizzando separatamente il comportamento in bassa frequenza ed il comportamento in alta frequenza (nell'ipotesi che si stia considerando un amplificatore a larga banda, tale cioè che la frequenza di taglio superiore f_H sia alcuni ordini di grandezza maggiore della frequenza di taglio inferiore f_L). Limitare lo studio al comportamento in bassa frequenza significa considerare una funzione di trasferimento del tipo:

$$A_V^{BF}(s) = A_{V0} F_L(s) = A_{V0} \frac{s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \cdots + c_1 s^1 + c_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s^1 + b_0}, \quad n = m \tag{1}$$

il cui modulo in alta frequenza risulta pari al guadagno a centro banda A_{V0}. Deve, quindi, essere, $\lim_{s\to\infty} |F_L(s)| = 1$, da cui il vincolo di avere il numeratore ed il denominatore di F_L dello stesso grado.

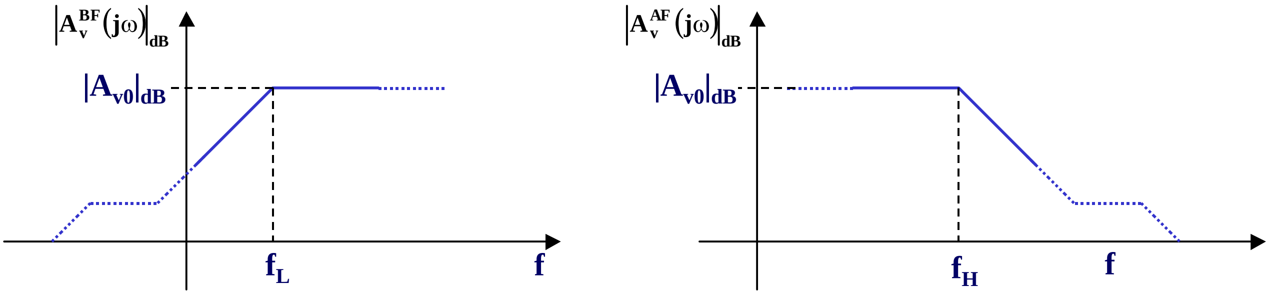
Un possibile andamento del modulo della funzione di trasferimento (1) è mostrato in figura 1a.

In modo analogo, limitare lo studio al comportamento in alta frequenza significa considerare una funzione di trasferimento del tipo:

$$A_V^{AF}(s) = A_{V0} F_H(s) = A_{V0} \frac{1 + d_1 s^1 + \cdots + d_{m-1} s^{m-1} + d_m s^m}{1 + a_1 s^1 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + a_n s^n}, \quad n > m \tag{2}$$

il cui modulo in bassa frequenza risulta pari al guadagno a centro banda A_{V0}. Deve, quindi, essere, $\lim_{s\to 0} |F_H(s)| = 1$, da cui il vincolo di avere il grado del numeratore inferiore al grado del denominatore. Un possibile andamento del modulo della funzione di trasferimento (2) è mostrato in figura 1b.

BASSA FREQUENZA (B.F.) ALTA FREQUENZA (A.F.)



a) b)

Figura 1- Possibili andamenti della risposta in frequenza di un amplificatore.

Prendiamo in considerazione il denominatore D(s) di una generica funzione di trasferimento rappresentativa della risposta in frequenza di un amplificatore (limitatamente alle basse frequenze o alle alte frequenze) espresso in forma fattorizzata:

$$D(s) = (s+\omega_1)(s+\omega_2)....(s+\omega_n) = s^n + b_{n-1}s^{n-1} + ... + b_1 s + b_0 \tag{3.a}$$

$$D(s) = (1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})\cdots(1+\frac{s}{\omega_n}) = 1 + a_1 s^1 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n \tag{3.b}$$

dove ω_1, .. ω_n rappresentano le frequenze dei poli (frequenze naturali della rete). Per semplicità, consideriamo il caso n = 3:

$$\begin{aligned} D(s) &= (1+\frac{s}{\omega_1})(1+\frac{s}{\omega_2})(1+\frac{s}{\omega_3}) = \\ &= 1 + s\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_3}\right) + s^2\left(\frac{1}{\omega_1\omega_2}+\frac{1}{\omega_1\omega_3}+\frac{1}{\omega_2\omega_3}\right) + s^3\frac{1}{\omega_1\omega_2\omega_3} \end{aligned} \tag{4}$$

Si osservi che, in generale, è:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\omega_i} \tag{5}$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{\omega_i\omega_j} \tag{6}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \tag{7}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\omega_i\omega_j \tag{8}$$

Si osservi che i coefficienti b_k (3.a) del polinomio caratteristico messo in forma monomia si ricavano dai coefficienti a_k (3.b) semplicemente dividendo ciascun coefficiente per a_n (coefficiente del termine di grado massimo).

Ora supponiamo che il polinomio (3.b) sia relativo ad una funzione di trasferimento descrittiva del comportamento di un amplificatore in alta frequenza (relativo, quindi, a $F_H(s)$). Se, in tale funzione di trasferimento, esiste un polo ω_k a frequenza minore di tutti gli altri poli e zeri della rete (*polo dominante*) allora la frequenza di taglio superiore di un amplificatore può essere approssimata con la frequenza del polo dominante, cioè $\omega_H \approx \omega_k$. Se, per esempio, risulta $\omega_1 << \omega_2, \ldots, \omega_n$, dalle (5) e (6) possiamo scrivere:

$$a_1 \approx \frac{1}{\omega_1} \tag{9}$$

$$a_2 \approx \frac{1}{\omega_1\omega_2} \tag{10}$$

da cui si ricava:

$$\omega_1 \approx \omega_H \approx \frac{1}{a_1} \tag{11}$$

$$\omega_2 \approx \frac{a_1}{a_2} \tag{12}$$

Si è così in grado di stimare la frequenza di taglio superiore e, allo stesso tempo, di stimare la posizione del polo maggiormente prossimo a quello dominante per la verifica della sua esistenza (a rigore bisognerebbe anche verificare la posizione degli zeri di $F_H(s)$ per garantire l'esistenza del polo dominante).

In modo analogo, si assuma che il polinomio (3) sia relativo ad una funzione di trasferimento descrittiva del comportamento di un amplificatore in bassa frequenza (relativo quindi a $F_L(s)$, una volta che si sia raccolto il termine a_n). Se, in tale funzione di trasferimento, esiste un polo ω_k a frequenza maggiore di tutti gli altri poli e zeri della rete (polo dominante) allora la frequenza di taglio inferiore di un amplificatore può essere approssimata con la frequenza del polo dominante, cioè $\omega_L \approx \omega_k$. Se, per esempio, risulta $\omega_1 >> \omega_2, \ldots, \omega_n$, dalle (7) e (8) possiamo scrivere:

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \approx \omega_1 \tag{13}$$

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{a_n} \approx \omega_1 \omega_2 \tag{14}$$

da cui si ricava:

$$\omega_H \approx \omega_1 \approx b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \tag{15}$$

$$\omega_2 \approx \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \tag{16}$$

Si è così in grado di stimare la frequenza di taglio inferiore e, allo stesso tempo, di stimare la posizione del polo maggiormente prossimo a quello dominante per la verifica della sua esistenza (a rigore bisognerebbe anche verificare la posizione degli zeri di $F_L(s)$ per garantire l'esistenza del polo dominante).

In conclusione, nell'ipotesi di polo dominante, la stima delle frequenze di taglio inferiore e superiore può essere fatta a partire dalla conoscenza dei soli coefficienti a_1 e $b_{n-1}=a_{n-1}/a_n$ del polinomio caratteristico.

Consideriamo ora un generico amplificatore di cui si vuole analizzare il comportamento in bassa frequenza e/o il comportamento in alta frequenza. Nel primo caso la risposta in frequenza è influenzata dai condensatori di accoppiamento e di bypass che quindi sono quelli da considerare nell'analisi. Nel secondo caso i condensatori da considerare sono quelli relativi ai modelli validi in un intervallo esteso di frequenze dei dispositivi attivi, più eventuali capacità esterne aggiunte con l'intento di limitare la risposta in alta frequenza. In entrambi i casi, la rete lineare che ne risulta è composta da resistenze, condensatori e generatori comandati.

Prima di procedere all'analisi occorre "semplificare" la rete sostituendo eventuali condensatori in serie o in parallelo con il condensatore equivalente. In questo modo si perviene ad una rete che si definisce *"ridotta"*.

E' facile intuire che se venisse aggiunta al circuito una semplice maglia RC collegata al circuito in un solo punto, questa non modificherebbe la risposta in frequenza dell'amplificatore pur facendo parte del circuito. Occorre quindi verificare che la rete che deve essere analizzata sia *connessa*. Questo significa che *"deve essere possibile determinare una funzione di trasferimento <u>non nulla</u> fra un ipotetico ingresso applicato alla coppia di morsetti di ciascun condensatore della rete e la tensione di uscita per la quale stiamo calcolando la risposta in frequenza"*. I condensatori che non godono di questa proprietà non debbono essere considerati nella valutazione della risposta in frequenza (si può verificare che il loro valore non modifica i calcoli che seguono).

Definita la rete da analizzare ci saranno N condensatori che influenzeranno la risposta in frequenza dell'amplificatore. Si può dimostrare (Dimostrazione) che i coefficienti a_1 e b_{n-1} possono essere calcolati nel seguente modo:

$$a_1 = \sum_{i=1}^{N} R_i^o C_i \tag{17}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i^s C_i} \tag{18}$$

dove N è il numero di condensatori della rete e R_i^o e R_i^s indicano le resistenze viste dal condensatore i-esimo con le altre capacità aperte (o = open) e cortocircuitate (s = short-circuit), ripettivamente. Le costanti di tempo nella sommatoria (17) vengono dette *costanti di tempo di circuito aperto*, mentre quelle relative alla sommatoria (18) prendono il nome di *costanti di tempo di corto circuito.* In definitiva, non è più necessario calcolare l'intera funzione di trasferimento di un amplificatore per stimarne la banda, ma è sufficiente il calcolo di resistenze viste da diversi nodi della rete.

Esempio: L'amplificatore a doppio carico

……