

## DIMOSTRAZIONE DEL METODO DELLE COSTANTI DI TEMPO DI CORTO CIRCUITO (SCTC) E DI CIRCUITO APERTO (OCTC)

(G.Spiazzì)

Consideriamo una generica rete lineare composta da resistenze, condensatori e generatori comandati. Essa può rappresentare un generico amplificatore di cui si vuole analizzare il comportamento in bassa frequenza (in tal caso i condensatori considerati saranno di accoppiamento e di bypass), oppure il comportamento in alta frequenza (in questo caso le capacità considerate sono relative ai modelli validi in un intervallo esteso di frequenze dei dispositivi attivi, più eventuali capacità esterne aggiunte con l'intento di limitare la risposta in alta frequenza). E' da notare che la rete è priva di generatori indipendenti, e rappresenta così il circuito a riposo, con ingressi annullati. Inoltre la rete si considera essere *ridotta* (i condensatori in serie o in parallelo sono sostituiti dal condensatore equivalente) e *connessa* (esiste una funzione di trasferimento non nulla fra le tensioni sui condensatori e la tensione di uscita dell'amplificatore). Per la necessità di queste ipotesi vedere il documento sugli approfondimenti del metodo delle costanti di tempo.

Le frequenze proprie della rete a riposo rappresentano i poli del sistema e coincidono con le radici del polinomio caratteristico della rete (polinomio a denominatore di qualsiasi funzione di trasferimento la cui rete a riposo abbia la stessa topologia). Di questa rete si mettano in evidenza tutte le porte a cui fanno capo i condensatori (supponiamo siano N), così come raffigurato in figura 1.

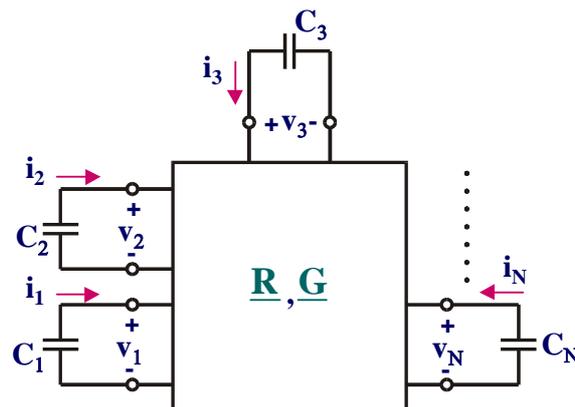


Figura 1 – Rete lineare generica, composta da resistenze e generatori comandati, con i condensatori posti in evidenza

E' possibile esprimere le tensioni a ciascuna porta in funzione delle correnti di tutte le N porte mediante una matrice di resistenze  $\underline{R}$  di dimensione  $N \times N$  (o, analogamente, di conduttanze  $\underline{G}$ ):

$$\underline{v} = \underline{R} \underline{i} \quad \Rightarrow \quad \underline{i} = \underline{G} \underline{v} \tag{1}$$

dove le matrici  $\underline{R}$  e  $\underline{G}$  hanno la seguente forma:

$$\underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \cdots & \mathbf{R}_{1N} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{N1} & \cdots & \cdots & \mathbf{R}_{NN} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{R}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} & \cdots & \mathbf{G}_{1N} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{G}_{N1} & \cdots & \cdots & \mathbf{G}_{NN} \end{bmatrix} \quad (2)$$

dove l'invertibilità delle matrici è assicurata dall'ipotesi di rete connessa.

Gli elementi delle matrici  $\underline{\mathbf{R}}$  e  $\underline{\mathbf{G}}$  hanno il seguente significato:

$$\mathbf{R}_{kh} = \frac{v_k}{i_h} \Big|_{i_j=0}, \quad j=1 \cdots N, j \neq h \quad (3.a)$$

$$\mathbf{G}_{kh} = \frac{i_k}{v_h} \Big|_{v_j=0}, \quad j=1 \cdots N, j \neq h \quad (3.b)$$

In particolare,  $\mathbf{R}_{kk}$  rappresenta la resistenza vista alla porta k-esima con tutte le altre porte aperte, mentre  $\mathbf{G}_{kk}$  rappresenta la conduttanza vista alla porta k-esima con tutte le altre porte cortocircuitate.

Le equazioni costitutive dei condensatori possono essere raggruppate nella seguente equazione matriciale:

$$\underline{\mathbf{i}} = -\underline{\mathbf{C}} \frac{d\underline{\mathbf{v}}}{dt} \Rightarrow -\underline{\mathbf{C}}^{-1} \underline{\mathbf{i}} = \frac{d\underline{\mathbf{v}}}{dt} \quad (4)$$

dove  $\underline{\mathbf{C}}$  è una matrice diagonale contenente i valori degli N condensatori della rete:

$$\underline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mathbf{C}_N \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{C}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{C}_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{\mathbf{C}_N} \end{bmatrix} \quad (4.a)$$

La (2) e la (4) possono essere combinate tra loro per ricavare l'equazione differenziale che esprime il comportamento delle grandezze della rete a riposo:

$$\underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{C}} \frac{d\underline{\mathbf{v}}}{dt} + \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (5.a)$$

oppure

$$\frac{d\underline{\mathbf{v}}}{dt} + \underline{\mathbf{C}}^{-1} \underline{\mathbf{G}} \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (5.b)$$

Tali equazioni, nel dominio delle Laplace trasformate diventano:

$$(\underline{\mathbf{s}} \underline{\mathbf{R}} \underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{I}}) \underline{\mathbf{v}} = 0 \quad (6.a)$$

oppure

$$(s + \underline{C}^{-1} \underline{G} \underline{I}) \underline{y} = 0 \quad (6.b)$$

dove  $\underline{I}$  è la matrice identità (matrice diagonale con tutti uno sulla diagonale principale). Il polinomio caratteristico della rete si ricava dal determinante della matrice

$$\det(s \underline{R} \underline{C} + \underline{I}) = 0 \quad (7.a)$$

oppure, in modo analogo,

$$\det(s \underline{I} + \underline{C}^{-1} \underline{G}) = 0 \quad (7.b)$$

Tali matrici sono di seguito riportate:

$$s \underline{R} \underline{C} + \underline{I} = \begin{bmatrix} sR_{11}C_1 + 1 & sR_{12}C_2 & \cdots & sR_{1N}C_N \\ sR_{21}C_1 & sR_{22}C_2 + 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ sR_{N1}C_1 & \cdots & \cdots & sR_{NN}C_N + 1 \end{bmatrix} \quad (8.a)$$

$$s \underline{I} + \underline{C}^{-1} \underline{G} = \begin{bmatrix} s + \frac{G_{11}}{C_1} & \frac{G_{12}}{C_1} & \cdots & \frac{G_{1N}}{C_1} \\ \frac{G_{21}}{C_2} & s + \frac{G_{22}}{C_2} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{G_{N1}}{C_N} & \cdots & \cdots & s + \frac{G_{NN}}{C_N} \end{bmatrix} \quad (8.b)$$

### Dimostrazione del metodo delle costanti di tempo di circuito aperto

Il calcolo del determinante della matrice (8.a) dà luogo ad un polinomio caratteristico il cui termine noto è unitario, mentre il determinante della matrice (8.b) produce lo stesso polinomio caratteristico ma espresso in forma monomia, avente cioè il coefficiente del termine in  $s$  di grado superiore unitario. Il determinante di una generica matrice  $\underline{A}$  si può calcolare nel seguente modo (sviluppo secondo una riga della matrice):

$$\det(\underline{A}) = \sum_{i=1}^N (-1)^{j+i} a_{ji} \det(\underline{T}_{ji}) \quad (9)$$

dove  $a$  sono gli elementi della matrice,  $j$  è un intero scelto nell'intervallo  $[1, N]$  e  $\underline{T}_{ji}$  è la sottomatrice ottenuta dalla matrice  $\underline{A}$  eliminando la riga  $j$ -esima e la colonna  $i$ -esima. Per esempio, scegliendo  $j=1$ , dalla (8.a) si ottiene:

$$\det(s \underline{R} \underline{C} + \underline{I}) = (sR_{11}C_1 + 1) \det(\underline{T}_{11}) - sR_{12}C_2 \det(\underline{T}_{12}) + \cdots (-1)^{1+N} sR_{1N}C_N \det(\underline{T}_{1N}) \quad (10)$$

Per semplicità analizziamo il caso  $N = 3$ .

$$\det(\underline{sRC} + \underline{I}) = \begin{bmatrix} sR_{11}C_1 + 1 & sR_{12}C_2 & sR_{13}C_3 \\ sR_{21}C_1 & sR_{22}C_2 + 1 & sR_{23}C_3 \\ sR_{31}C_1 & sR_{32}C_2 & sR_{33}C_3 + 1 \end{bmatrix} = \quad (11)$$

$$= (sR_{11}C_1 + 1)\det(\underline{T}_{11}) - sR_{12}C_2 \det(\underline{T}_{12}) + sR_{13}C_3 \det(\underline{T}_{13})$$

$$\det(\underline{T}_{11}) = \det \begin{bmatrix} sR_{22}C_2 + 1 & sR_{23}C_3 \\ sR_{32}C_2 & sR_{33}C_3 + 1 \end{bmatrix} = (sR_{22}C_2 + 1)(sR_{33}C_3 + 1) - s^2R_{23}R_{32}C_2C_3 = \quad (12.a)$$

$$= 1 + s(R_{22}C_2 + R_{33}C_3) + s^2(R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32})C_2C_3$$

$$\det(\underline{T}_{12}) = \det \begin{bmatrix} sR_{21}C_1 & sR_{23}C_3 \\ sR_{31}C_1 & sR_{33}C_3 + 1 \end{bmatrix} = sR_{21}C_1(sR_{33}C_3 + 1) - s^2R_{23}R_{31}C_1C_3 = \quad (12.b)$$

$$= sR_{21}C_1 + s^2(R_{21}R_{33} - R_{23}R_{31})C_1C_3$$

$$\det(\underline{T}_{13}) = \det \begin{bmatrix} sR_{21}C_1 & sR_{22}C_2 + 1 \\ sR_{31}C_1 & sR_{32}C_2 \end{bmatrix} = s^2R_{21}R_{32}C_1C_2 - sR_{31}C_1(sR_{22}C_2 + 1) = \quad (12.c)$$

$$= -sR_{31}C_1 + s^2(R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31})C_1C_2$$

$$\det(\underline{sRC} + \underline{I}) = (sR_{11}C_1 + 1)(1 + s(R_{22}C_2 + R_{33}C_3) + s^2(R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32})C_2C_3) - \quad (13)$$

$$- sR_{12}C_2(sR_{21}C_1 + s^2(R_{21}R_{33} - R_{23}R_{31})C_1C_3) +$$

$$+ sR_{13}C_3(-sR_{31}C_1 + s^2(R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31})C_1C_2)$$

In definitiva, il polinomio caratteristico è, in questo caso, un polinomio del terzo ordine i cui coefficienti sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\det(\underline{sRC} + \underline{I}) = 1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 = D(s) \quad (14)$$

$$a_1 = R_{11}C_1 + R_{22}C_2 + R_{33}C_3 \quad (15)$$

$$a_2 = (R_{11}R_{22} - R_{12}R_{21})C_1C_2 + (R_{11}R_{33} - R_{13}R_{31})C_1C_3 + (R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32})C_2C_3 \quad (16)$$

$$a_3 = [R_{11}(R_{22}R_{33} - R_{23}R_{32}) - R_{12}(R_{21}R_{33} - R_{23}R_{31}) + R_{13}(R_{21}R_{32} - R_{22}R_{31})]C_1C_2C_3 \quad (17)$$

Come si può osservare, il coefficiente  $a_1$  relativo al termine di grado unitario risulta somma di costanti di tempo. In particolare, possiamo scrivere:

$$a_1 = \sum_{i=1}^N R_{ii}C_i = \sum_{i=1}^N R_i^{\circ}C_i \quad (18)$$

dove con la notazione  $R_i^{\circ}$  si intende la resistenza vista alla porta  $i$ -esima con le altre porte aperte. Allo stesso modo, le costanti di tempo nella sommatoria (18) vengono dette *costanti di tempo di circuito aperto*.

Il coefficiente  $a_2$ , relativo al termine di secondo grado, dalla (16) risulta invece dato dalla somma di prodotti di costanti di tempo. Al fine di capire il significato fisico di tali costanti di tempo,

consideriamo la figura 2, che evidenzia due porte della rete di cui una è cortocircuitata, mentre tutte le altre porte si considerano aperte. Le equazioni alle due porte danno le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} v_k = R_{kk}i_k + R_{kh}i_h \\ v_h = R_{hk}i_k + R_{hh}i_h = 0 \Rightarrow i_h = -\frac{R_{hk}}{R_{hh}}i_k \end{cases} \quad (19)$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$v_k = \left( \frac{R_{kk}R_{hh} - R_{kh}R_{hk}}{R_{hh}} \right) i_k \quad (20)$$

Dalla (20) si osserva che

$$\frac{R_{kk}R_{hh} - R_{kh}R_{hk}}{R_{hh}} = \frac{v_k}{i_k} \Big|_{v_h=0} \quad (21)$$

rappresenta la resistenza vista alla porta k-esima con la porta h-esima cortocircuitata e tutte le altre porte aperte. Nel seguito indicheremo tale resistenza con il simbolo  $R_k^{hs}$ . In modo analogo:

$$\frac{R_{kk}R_{hh} - R_{hk}R_{kh}}{R_{kk}} = \frac{v_h}{i_h} \Big|_{v_k=0} \quad (22)$$

rappresenta la resistenza vista alla porta h-esima con la porta k-esima cortocircuitata e tutte le altre porte aperte. Confrontando le (21) e (22) si osserva che vale la seguente relazione:

$$R_{kk}R_{hh} - R_{hk}R_{kh} = R_k^o R_h^{ks} = R_k^{hs} R_h^o \quad (23)$$

Possiamo, quindi, scrivere:

$$a_2 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N R_i^o R_j^{is} C_i C_j = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N R_i^{js} R_j^o C_i C_j \quad (24)$$

Nell'ipotesi di polo dominante in alta frequenza (polo a frequenza minore di tutti gli altri poli e zeri della funzione di trasferimento valida in alta frequenza), la frequenza di taglio superiore può essere approssimata dalla seguente espressione:

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} \approx \frac{1}{2\pi a_1} = \frac{1}{2\pi \sum_{i=1}^N R_i^o C_i} \quad (25)$$

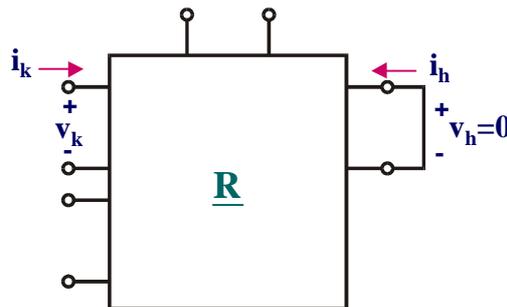


Figura 2 – Rete per il calcolo di  $R_k^{hs}$

### Dimostrazione del metodo delle costanti di tempo di cortocircuito

Per la dimostrazione del metodo delle costanti di tempo di cortocircuito risulta più semplice partire dalla matrice (8.b) calcolandone il determinante (caso  $N = 3$ ):

$$\det(\underline{sI} + \underline{C}^{-1}\underline{G}) = \det \begin{bmatrix} s + \frac{G_{11}}{C_1} & \frac{G_{12}}{C_1} & \frac{G_{13}}{C_1} \\ \frac{G_{21}}{C_2} & s + \frac{G_{22}}{C_2} & \frac{G_{23}}{C_2} \\ \frac{G_{31}}{C_3} & \frac{G_{32}}{C_3} & s + \frac{G_{33}}{C_3} \end{bmatrix} = \quad (26)$$

$$= \left( s + \frac{G_{11}}{C_1} \right) \det(\underline{T}_{11}) - \frac{G_{12}}{C_1} \det(\underline{T}_{12}) + \frac{G_{13}}{C_1} \det(\underline{T}_{13})$$

$$\det(\underline{T}_{11}) = \det \begin{bmatrix} s + \frac{G_{22}}{C_2} & \frac{G_{23}}{C_2} \\ \frac{G_{32}}{C_3} & s + \frac{G_{33}}{C_3} \end{bmatrix} = \left( s + \frac{G_{22}}{C_2} \right) \left( s + \frac{G_{33}}{C_3} \right) - \frac{G_{32}}{C_3} \frac{G_{23}}{C_2} = \quad (27)$$

$$= s^2 + s \left( \frac{G_{22}}{C_2} + \frac{G_{33}}{C_3} \right) + \frac{G_{22}}{C_2} \frac{G_{33}}{C_3} - \frac{G_{32}}{C_3} \frac{G_{23}}{C_2}$$

$$\det(\underline{T}_{12}) = \det \begin{bmatrix} \frac{G_{21}}{C_2} & \frac{G_{23}}{C_2} \\ \frac{G_{31}}{C_3} & s + \frac{G_{33}}{C_3} \end{bmatrix} = \frac{G_{21}}{C_2} \left( s + \frac{G_{33}}{C_3} \right) - \frac{G_{31}}{C_3} \frac{G_{23}}{C_2} = \quad (28)$$

$$= s \left( \frac{G_{21}}{C_2} \right) + \frac{G_{21}}{C_2} \frac{G_{33}}{C_3} - \frac{G_{31}}{C_3} \frac{G_{23}}{C_2}$$

$$\det(\underline{T}_{13}) = \det \begin{bmatrix} \frac{G_{21}}{C_2} & s + \frac{G_{22}}{C_2} \\ \frac{G_{31}}{C_3} & \frac{G_{32}}{C_3} \end{bmatrix} = \frac{G_{21}}{C_2} \frac{G_{32}}{C_3} - \frac{G_{31}}{C_3} \left( s + \frac{G_{22}}{C_2} \right) = \quad (29)$$

$$= -s \left( \frac{G_{31}}{C_3} \right) + \frac{G_{21}}{C_2} \frac{G_{32}}{C_3} - \frac{G_{31}}{C_3} \frac{G_{22}}{C_2}$$

$$\det(\underline{sI} + \underline{C}^{-1}\underline{G}) = \left( s + \frac{G_{11}}{C_1} \right) \left( s^2 + s \left( \frac{G_{22}}{C_2} + \frac{G_{33}}{C_3} \right) + \frac{G_{22}}{C_2} \frac{G_{33}}{C_3} - \frac{G_{32}}{C_3} \frac{G_{23}}{C_2} \right) - \quad (30)$$

$$- \frac{G_{12}}{C_1} \left( s \frac{G_{21}}{C_2} + \frac{G_{21}}{C_2} \frac{G_{33}}{C_3} - \frac{G_{31}}{C_3} \frac{G_{23}}{C_2} \right) + \frac{G_{13}}{C_1} \left( -s \frac{G_{31}}{C_3} + \frac{G_{21}}{C_2} \frac{G_{32}}{C_3} - \frac{G_{31}}{C_3} \frac{G_{22}}{C_2} \right) = s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0$$

I coefficienti del polinomio caratteristico sono dati dalle seguenti espressioni:

$$b_2 = \frac{a_2}{a_3} = \frac{G_{11}}{C_1} + \frac{G_{22}}{C_2} + \frac{G_{33}}{C_3} \quad (31)$$

$$b_1 = \frac{a_1}{a_3} = \frac{G_{22} G_{33}}{C_2 C_3} - \frac{G_{32} G_{23}}{C_3 C_2} + \frac{G_{11}}{C_1} \left( \frac{G_{22}}{C_2} + \frac{G_{33}}{C_3} \right) - \frac{G_{12} G_{21}}{C_1 C_2} - \frac{G_{13} G_{31}}{C_1 C_3} =$$

$$= \frac{1}{C_1 C_2} (G_{11} G_{22} - G_{12} G_{21}) + \frac{1}{C_1 C_3} (G_{11} G_{33} - G_{13} G_{31}) + \frac{1}{C_2 C_3} (G_{22} G_{33} - G_{32} G_{23}) \quad (32)$$

$$b_0 = \frac{a_0}{a_3} = \frac{G_{11}}{C_1} \left( \frac{G_{22} G_{33}}{C_2 C_3} - \frac{G_{32} G_{23}}{C_3 C_2} \right) - \frac{G_{12}}{C_1} \left( \frac{G_{21} G_{33}}{C_2 C_3} - \frac{G_{31} G_{23}}{C_3 C_2} \right) + \frac{G_{13}}{C_1} \left( \frac{G_{21} G_{32}}{C_2 C_3} - \frac{G_{31} G_{22}}{C_3 C_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{C_1 C_2 C_3} [G_{11} (G_{22} G_{33} - G_{32} G_{23}) - G_{12} (G_{21} G_{33} - G_{31} G_{23}) + G_{13} (G_{21} G_{32} - G_{31} G_{22})] \quad (33)$$

Osserviamo che il coefficiente  $b_2$  è espresso mediante somma di inversi di costanti di tempo di cortocircuito. In generale risulta:

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \sum_{i=1}^N \frac{G_{ii}}{C_i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i^s C_i} \quad (34)$$

dove con  $R_i^s$  si intende la resistenza vista dal condensatore  $i$ -esimo con tutti gli altri cortocircuitati.

Il coefficiente  $b_1$ , invece, risulta composto dalla somma di inversi di prodotti di costanti di tempo.

Per capire il loro significato si faccia riferimento alla figura 3 che riporta due porte generiche della rete in cui una è lasciata aperta, mentre tutte le altre sono cortocircuitate.

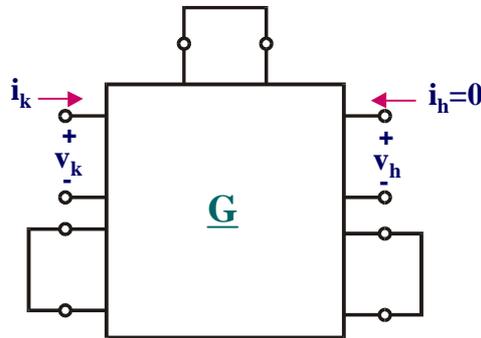


Figura 3 - Rete per il calcolo di  $G_k^{ho}$

Le equazioni alle due porte risultano, quindi:

$$\begin{cases} i_k = G_{kk} v_k + G_{kh} v_h \\ i_h = G_{hk} v_k + G_{hh} v_h = 0 \end{cases} \Rightarrow v_h = -\frac{G_{hk}}{G_{hh}} v_k \quad (35)$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$i_k = \left( \frac{G_{kk} G_{hh} - G_{kh} G_{hk}}{G_{hh}} \right) v_k \quad (36)$$

Dalla (36) si osserva che

$$\frac{G_{kk} G_{hh} - G_{kh} G_{hk}}{G_{hh}} = \frac{i_k}{v_k /_{i_h=0}} \quad (37)$$

rappresenta la conduttanza vista alla porta k-esima con la porta h-esima aperta e tutte le altre porte cortocircuitate. Nel seguito indicheremo tale conduttanza con il simbolo  $G_k^{ho}$ . In modo analogo:

$$\frac{G_{kk}G_{hh} - G_{hk}G_{kh}}{G_{kk}} = \frac{i_h}{v_h} \Big|_{i_k=0} \quad (38)$$

rappresenta la conduttanza vista alla porta h-esima con la porta k-esima aperta e tutte le altre porte cortocircuitate. Confrontando le (37) e (38) si osserva che vale la seguente relazione:

$$G_{kk}G_{hh} - G_{hk}G_{kh} = G_k^s G_h^{ko} = G_k^{ho} G_h^s \quad (39)$$

In generale, quindi, il coefficiente  $b_{n-2}$  risulta dato dalla seguente espressione:

$$b_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{G_i^s G_j^{io}}{C_i C_j} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{G_i^{jo} G_j^s}{C_i C_j} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{1}{R_i^{jo} R_j^s C_i C_j} \quad (40)$$

Nell'ipotesi di polo dominante in bassa frequenza (polo a frequenza maggiore di tutti gli altri poli e zeri della funzione di trasferimento valida in bassa frequenza), la frequenza di taglio inferiore può essere approssimata dalla seguente espressione:

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} \approx \frac{b_{n-1}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i^s C_i} \quad (41)$$

NOTE: ....