APPUNTI SUL CONTROLLO PREDITTIVO

G. Picci

a.a. 2007/2008

1 MPC per modelli I/O scalari

Da scrivere...

2 MPC per modelli di stato

Come visto in precedenza il calcolo del predittore dell'uscita su cui basare il controllore MPC nel contesto del capitolo predente (sistemi stazionari descritti da modelli tipo Box-Jenkins) richiede la stabilità del sistema. Questa è una limitazione abbastanza seria che taglia fuori dalle applicazioni sistemi instabili o al limite di stabilità. In questo capitolo mostreremo che si può evitare questa restrizione facendo uso di descrizioni tramite modelli di stato. La trattazione in questo capitolo richiede però alcune conoscenze sul Filtro di Kalman. Informazioni dettagliate su questo argomento si possono trovare nel testo [1] (Le notazioni qui sotto non riprendono necessariamente quelle del testo).

Descrizione del problema

Supponiamo che il sistema da controllare sia descritto da un modello di stato lineare del tipo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) + G\mathbf{w}(t) & \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{w}(t) \quad , & t \geq t_0 \end{cases} \tag{1}$$

dove A, B, G, C, D sono matrici costanti note, $\{\mathbf{w}(t)\}$ è un processo di rumore bianco p-dimensionale normalizzato,

$$\mathbb{E}\,\mathbf{w}(t)\,\mathbf{w}(s)^\top = I_p\delta(t-s) \qquad \mathbb{E}\,\mathbf{x}_0\,\mathbf{w}(t)^\top = 0 \quad \forall\, t \geq t_0$$

Dati iniziali $\mathbb{E}\,\mathbf{x}_0 = \mu_0\,,\quad \mathrm{Var}\;\mathbf{x}_0 = \Sigma_0\,.$ Da notare che l'uso dello stesso rumore bianco $\mathbf{w}$ sia nell'equazione di stato che in quella di uscita è solo una questione di notazioni. Di fatto la matrice di auto e mutua covarianza dei rumori bianchi $\mathbf{w}_1(t) := G\mathbf{w}(t)$ e $\mathbf{w}_2(t) := D\mathbf{w}(t)$ si scrive

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} G\mathbf{w}(t) \\ D\mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}(s)^\top G^\top & \mathbf{w}(s)^\top D^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^\top & R \end{bmatrix} \delta(t-s)$$

dove:

$$Q = GG^\top\,,\quad S = GD^\top\,,\quad R = DD^\top$$

per cui se $S = GD^\top = 0$ i rumori di stato, $\mathbf{w}_1$, e di uscita, $\mathbf{w}_2$, sono scorrelati.
Ad ogni istante t, a partire da un certo istante iniziale t_0, si acquisisce l'uscita misurata $\mathbf{y}(t)$ ed è disponibile l'**informazione all'istante** t: $\{\mathbf{y}^t,\, \mathbf{u}^{t-1}\}$ (in realtà poi questa informazione verrà "compressa" e servirà solo la stima dello stato).
I *predittori* all'istante $t+k$ si denotano $\hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t)$, $\hat{\mathbf{u}}(t+k \mid t)$.

NB: Il simbolo $\hat{\mathbf{u}}(t+k \mid t)\,, k \geq 0\,,$ significa che il controllo ammissibile all'istante $t+k$ è una funzione (lineare) dell'informazione disponibile all'istante t: $\{\mathbf{y}^t,\, \mathbf{u}^{t-1}\}$. In particolare, $\hat{\mathbf{u}}(t \mid t)$ è il controllo calcolato in base all'informazione disponibile all'istante in cui è disponibile l'ultima misura $\mathbf{y}(t)$.

2.1 Il predittore di Kalman

Riportiamo da [1] il seguente

Algoritmo 2.1 (Filtro di Kalman). *Supponiamo che la varianza ($R = DD^\top$) di $\mathbf{w}_2$ sia invertibile e definiamo le matrici*[1]

$$F = A - SR^{-1}C\,,\qquad \tilde{Q} = Q - SR^{-1}\,S^\top \tag{2}$$

Allora gli stimatori lineari a minima varianza d'errore $\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t)$ e $\hat{\mathbf{x}}(t \mid t)$ dello stato del modello lineare (1) all'istante $t+1$ e t, in base alle osservazioni $\{\mathbf{y}^t,\, \mathbf{u}^{t-1}\}$, sono calcolabili mediante il seguente algoritmo ricorsivo.

[1] Notare che se i rumori bianchi di stato e di uscita sono tra loro scorrelati ($S = 0$) si ha

$$F = A \qquad \tilde{Q} = Q\,.$$

1. Stime a priori *(Aggiornamento temporale)*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) &= A\,\hat{\mathbf{x}}(t \mid t) + B\mathbf{u}(t \mid t) + SR^{-1}[\mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t \mid t)]\,, & (3)\\ P(t+1 \mid t) &= FP(t \mid t)\,F^\top + \tilde{Q} \quad , \qquad t \geq t_0 \quad . & (4) \end{aligned}$$

2. Stime a posteriori *(Aggiornamento rispetto alle misure)*

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) &= \hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1) + L(t)[\mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1)] & (5)\\ P(t \mid t) &= P(t \mid t-1) - P(t \mid t-1)\,C^\top \Lambda(t)^{-1}\,CP(t \mid t-1) & (6) \end{aligned}$$

3. Condizioni iniziali,

$$\hat{\mathbf{x}}(t_0 \mid t_0 - 1) = \mathbb{E}\,\mathbf{x}(t_0) \quad , \qquad P(t_0 \mid t_0 - 1) = \mathrm{Var}\,\{\mathbf{x}(t_0)\}\,. \qquad (7)$$

Dove le matrici F e $\tilde{Q}$ sono definite dalla (2) *e $P(t+1 \mid t)$ e $P(t \mid t)$ sono le* varianze degli errori di predizione e di di filtraggio, *definiti come*

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) := \hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) - \mathbf{x}(t+1)\,, \qquad \tilde{\mathbf{x}}(t \mid t) := \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) - \mathbf{x}(t)$$

ovvero,

$$P(t+1 \mid t) = \mathbb{E}\,\tilde{\mathbf{x}}(t+1 \mid t)\,\tilde{\mathbf{x}}(t+1 \mid t)^\top \quad , \qquad P(t \mid t) = \mathbb{E}\,\tilde{\mathbf{x}}(t \mid t)\,\tilde{\mathbf{x}}(t \mid t)^\top$$

e $\Lambda(t)$ è la varianza del processo di innovazione $\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1)$,

$$\Lambda(t) = CP(t \mid t-1)\,C^\top + R \qquad (8)$$

Il guadagno del filtro $L(t)$ *è calcolabile tramite la*

$$L(t) = P(t \mid t-1)\,C^\top \Lambda^{-1}(t) \quad . \qquad (9)$$

L'ultimo termine in (3) è una correzione dovuta alla correlazione dei rumori di stato e di uscita. Esso scompare se $S = 0$. Si dimostra (vedere [1, p. 303]) che il processo di *innovazione del filtro*

$$\mathbf{e}_F(t) := \mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t \mid t)$$

è rumore bianco scorrelato dalla storia passata per cui $\hat{\mathbf{e}}_F(t+k \mid t) = 0$ se $k \geq 1$ mentre $\hat{\mathbf{e}}_F(t \mid t) \equiv \mathbf{e}_F(t)$.

Eliminando la variabile $\hat{\mathbf{x}}(t \mid t)$ nelle relazioni (3) e (5) si ricava un algoritmo ricorsivo per l'aggiornamento del solo predittore di un passo:

$$\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t) = A\,\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1) + B\mathbf{u}(t \mid t) + K(t)\,[\mathbf{y}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1)\,]\ , \quad (10)$$

in cui

$$K(t) = [AP(t \mid t-1)C^\top + S]\,\Lambda^{-1}(t) \tag{11}$$

è il guadagno del predittore. Notare la struttura a controreazione sull'errore di predizione del segnale $\mathbf{y}(t)$. Analogamente si potrebbe eliminare $P(t \mid t)$ dalle (4) e (6) trovando un algoritmo ricorsivo per l'aggiornamento della sola varianza del predittore (questa è la famosa *equazione di Riccati* del filtro di Kalman). A noi comunque l'algoritmo servirà scritto nella forma originale.

2.2 Effetto degli ingressi futuri sul Predittore

Supponiamo di aver progettato delle leggi di controllo che generano ingressi futuri, basate sull'informazione disponibile all'istante t, diciamole

$$\hat{\mathbf{u}}(t+s \mid t) = \psi_s(\mathbf{y}^t,\, \mathbf{u}^{t-1})\,, \quad s = 0, 1, \dots, k \tag{12}$$

Con una facile generalizzazione della formula (3) si vede che il predittore a k passi in avanti dello stato, basato sull'informazione all'istante t, e sui controlli futuri (12) si scrive

$$\hat{\mathbf{x}}(t+k \mid t) = A^k \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) + \sum_{s=0}^{k-1} A^{k-1-s} B \hat{\mathbf{u}}(t+s \mid t) + SR^{-1}\,\hat{\mathbf{e}}_F(t \mid t) \tag{13}$$

e il corrispondente predittore dell'uscita $\hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t)$ si può così scrivere

$$\hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t) = CA^k \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) + \sum_{s=0}^{k-1} CA^{k-1-s} B \hat{\mathbf{u}}(t+s \mid t) + CSR^{-1}\,\hat{\mathbf{e}}_F(t) \tag{14}$$

Notare che in questa espressione il termine $CSR^{-1}\,\hat{\mathbf{e}}_F(t)$ è indipendente da k e non dipende nè dal controllo all'istante t, nè da quelli successivi. Per questo motivo può essere sottratto dal predittore $\hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t)$ e d'ora in poi supporremo di aver definito i predittori dell'uscita all'istante t inglobando questo termine **senza nemmeno cambiare notazione**. Alla fine, il controllo "effettivo" da applicare al sistema quando $S \neq 0$, dipenderà dai predittori

$$\mathbf{y}_S(t+k \mid t) := \hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t) - CSR^{-1}\,\hat{\mathbf{e}}_F(t)$$

invece che dai $\hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t)$.

2.3 Formulazione del problema MPC

Siano T un **orizzonte di predizione** e $N < T$ un **orizzonte di controllo**. Impilando le relazioni (14) e definendo le variabili

$$\hat{\mathbf{y}}_t^+ := \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(t+1 \mid t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t+2 \mid t) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}(t+T \mid t) \end{bmatrix}; \qquad \hat{\mathbf{u}}_t^+ := \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(t \mid t) \\ \hat{\mathbf{u}}(t+1 \mid t) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}(t+N \mid t) \end{bmatrix}$$

si trova che i predittori sono legati ai controlli futuri dalla

$$\hat{\mathbf{y}}_t^+ = M_T \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) + H_T \hat{\mathbf{u}}_t^+ \tag{15}$$

Dove:

$$M_T = \begin{bmatrix} CA \\ \vdots \\ CA^T \end{bmatrix} \qquad H_T = \begin{bmatrix} CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots \\ \vdots & & & \vdots \\ CA^{N-1}B & \dots & & CB \\ \vdots & & & \vdots \\ CA^{T-1}B & \dots & & CA^{T-N-1}B \end{bmatrix} \tag{16}$$

in cui $\hat{\mathbf{x}}(t \mid t)$ è la stima di Kalman calcolata all'istante t, appena viene acquisita la misura $\mathbf{y}(t)$. Naturalmente per questo scopo serve il guadagno del filtro di Kalman $L(t)$, che si può però calcolare fuori linea con le formule viste nel paragrafo precedente.

Per il calcolo del predittore al passo successivo, $\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1)$, si usa la (3), e quindi **occorre conoscere** $\hat{\mathbf{u}}(t \mid t)$ che è calcolato nel passo di ottimizzazione. Il calcolo di $\hat{\mathbf{x}}(t \mid t-1)$ deve quindi seguire il passo di ottimizzazione.

Per procedere al passo di ottimizzazione dobbiamo definire una **traiettoria desiderata** $\{r(t+k)\,; k = 1, 2, \dots, T\}$, che in un problema di inseguimento potrebbe ad esempio essere generata esternamente da un meccanismo esogeno, e **il funzionale di costo**, che si assume normalmente di tipo quadratico

$$J(\hat{\mathbf{u}}_t^+) = \sum_{k=1}^{T} [\hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t) - r(t+k)]^\top Q_k \, [\hat{\mathbf{y}}(t+k \mid t) - r(t+k)] + \\ + \sum_{k=0}^{N} \hat{\mathbf{u}}(t+k \mid t)^\top R_k \, \hat{\mathbf{u}}(t+k \mid t)\,, \tag{17}$$

dove le matrici Q_k e R_k sono dei pesi che si assegnano alla deviazione della traiettoria predetta da quella desiderata e all'ampiezza del controllo necessaria per raggiungere l'obiettivo. Nel problema di controllo MPC si possono considerare espliciamente **i vincoli**, che possono essere posti sia sull'ampiezza massima delle variabili di stato che su quelle di controllo. Per semplicità noi qui supponiamo che i vincoli siano solo sull'ampiezza dei controlli ammissibili

$$|\hat{\mathbf{u}}(t+k \mid t)| \leq U_k\,, \quad k = 0, 1, \ldots, N\,, \tag{18}$$

però in generale il problema è risolubile anche quando i vincoli siano esprimibili mediante sistemi di disequazioni **lineari** nelle variabili di stato e di controllo. Si perviene così al problema di ottimo

$$\min_{\hat{\mathbf{u}}_t^+} J(\hat{\mathbf{u}}_t^+) \tag{19}$$

soggetto alle condizioni (18). Dato che gli orizzonti di predizione e di controllo sono finiti questo è un problema risolubile mediante tecniche di **ottimizzazione quadratica** (*Quadratic programming* in inglese) che sono state messe a punto negli ultimi decenni e per le quali sono disponibili algoritmi molto efficienti.

Da notare che il problema di ottimizzazione (19) si può risolvere esplicitamente quando non ci sono vincoli. Definendo

$$Q := \mathrm{diag}\{Q_1\, Q_2\, \ldots\, Q_T\}\,, \quad R := \mathrm{diag}\{R_1\,, R_2\, \ldots, R_N\}$$

e definendo il vettore mT-dimensionale r_t^+ analogamente a quanto fatto per $\hat{\mathbf{y}}_t^+$, si può riscrivere (17) nella forma

$$\begin{aligned} J(\hat{\mathbf{u}}_t^+) &= \left[\hat{\mathbf{y}}_t^+ - r_t^+\right]^\top Q \left[\hat{\mathbf{y}}_t^+ - r_t^+\right] + (\hat{\mathbf{u}}_t^+)^\top R\, \hat{\mathbf{u}}_t^+ = \\ &= \left[M_T \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) - r_t^+\right]^\top Q \left[M_T \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) - r_t^+\right] + \\ +2(\hat{\mathbf{u}}_t^+)^\top H_T^\top Q &\left[M_T \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) - r_t^+\right] + (\hat{\mathbf{u}}_t^+)^\top \left[R + H_T^\top Q H_T\right] \hat{\mathbf{u}}_t^+ \end{aligned} \tag{20}$$

che si può minimizzare esplicitamente prendendo

$$\hat{\mathbf{u}}_t^+ = \left[R + H_T^\top Q H_T\right]^{-1} H_T^\top Q \left[M_T \hat{\mathbf{x}}(t \mid t) - r_t^+\right]\,. \tag{21}$$

Una volta calcolato il controllo ottimo, dal vettore dei controlli ottimi si estrae **la prima componente** $\hat{\mathbf{u}}(t \mid t)$ e la si applica al sistema. In contemporanea si calcola il predittore di un passo dello stato con la (3).

Il sistema esegue così la transizione $t \to t+1$ e produce l'uscita $\mathbf{y}(t+1)$. A questo punto si può calcolare $\hat{\mathbf{x}}(t+1 \mid t+1)$ e si riinizia il ciclo dall'istante $t+1$. etc. etc.

3 Codifica dell'algoritmo

Quanto sopra può facilmente essere tradotto in una funzione MATLAB. In particolare, lo studente potrà,

- eventualmente includere nella funzione una routine (funzione) che risolve il problema di programmazine quadratica (vedere nei vari Toolboxes MATLAB).
- fornire una semplice demo del programma e mostrare l'effetto della variazione dei pesi specialmente i pesi "finali" Q_T, Q_{T-1}, ..., ad esempio nel caso in cui A è instabile.
- Lo studente volonteroso potrebbe distinguere tra **uscita misurata** (che serve solo come ingresso al filtro di Kalman) e l' **uscita controllata** (che si dovrà chiamare con un nome diverso, ad es. $\mathbf{z}$) e non è necessariamente la stessa. Questa è la variabile che entra nella funzione costo al posto della $\mathbf{y}$. Ci sono due matrici C diverse da mettere in conto...

Riferimenti bibliografici

[1] G. Picci, *FILTRAGGIO STATISTICO (Wiener, Levinson, Kalman) E APPLICAZIONI*, Ed Libreria Progetto, Padova 2006.