

Modello della colonna

Equazioni relative all'i-esimo piatto

$$\frac{dM_i}{dt} = L_{i+1} + V_{i-1} - L_i - V_i$$

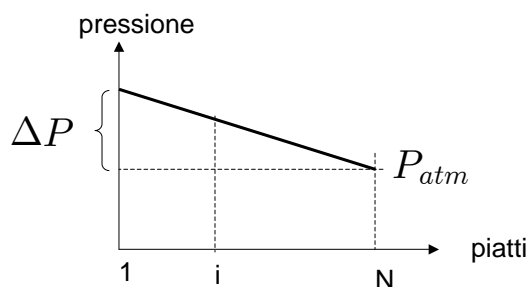
$$\frac{d(M_i x_i)}{dt} = L_{i+1} x_{i+1} + V_{i-1} y_{i-1} - L_i x_i - V_i y_i$$

Le variabili di stato sono le concentrazione e gli holdup su tutti i piatti.
Quindi:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{M_i} \left(\frac{d(M_i x_i)}{dt} - x_i \frac{d(M_i)}{dt} \right)$$

Pressione nella colonna

La pressione all'interno della colonna viene modellata assumendo che essa vari linearmente a partire dalla pressione atmosferica in testa alla colonna per arrivare alla pressione sul fondo (che risulta più alta)



$$P_{i+1} = P_i - \frac{\Delta P}{N}$$

$$P_1 = P_{atm} + \Delta P$$

La pressione influenza:

- l'equilibrio liquido-vapore
- le portate di liquido e di vapore

Idraulica dei piatti 1

Le portate di liquido dipendono dalla:

- forma del piatto (caratteristiche costruttive)
- quantità di materia (holdup)
- densità del liquido (temperatura, concentrazioni, pressione, portata vapore)



Equazioni empiriche

$$L_i = f(x_i, y_i, M_i, V_i, T_i, P_i)$$

Difficoltà:

- i parametri del piatto vanno determinati sperimentalmente
- difficoltà con miscele non ideali (equilibrio liquido-vapore)
- calcoli dispendiosi

Idraulica dei piatti 2

Nella costruzione del modello semplificato si è adottata la seguente approssimazione:

$$L_i = L_{0i} + (M_i - M_{0i})/\tau$$

dove:

- L_{0i} sono i flussi di liquido iniziali [mol/s] (uguale al riflusso sui piatti sopra l'alimentazione e alla somma del riflusso e dell'alimentazione dal piatto dell'alimentazione in giù)

$$L_{0i} = R, \forall i > N_f$$

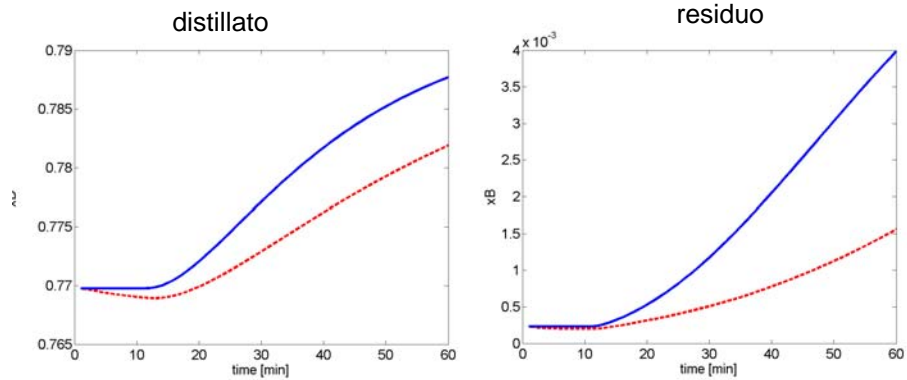
$$L_{0i} = R + F, \forall i \leq N_f$$

- M_{0i} sono le quantità di materia iniziali nei piatti [mol]
- τ = costante di tempo [min] (parametro di tuning)

Idraulica dei piatti 3

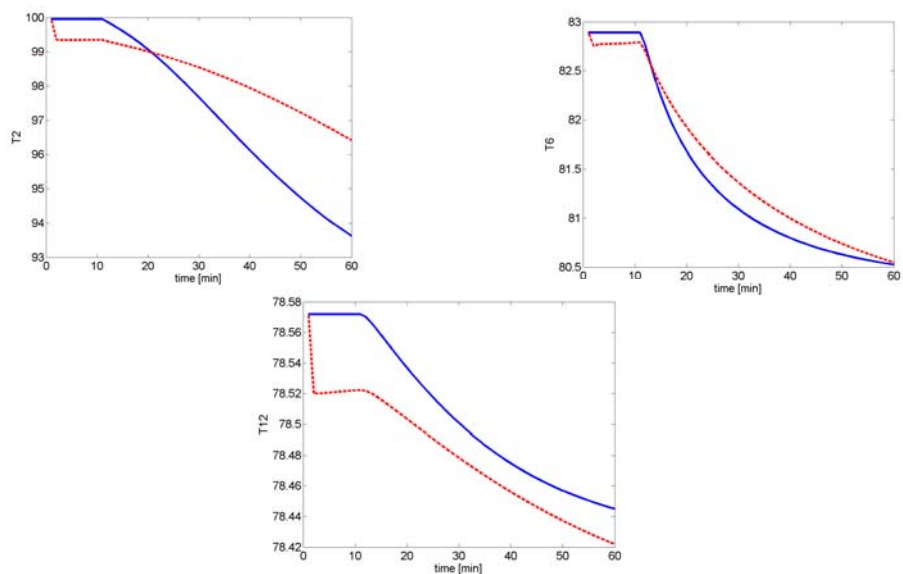
Variazione del 10% sul flusso dell'alimentazione F

Andamento delle concentrazioni del distillato e del residuo



Idraulica dei piatti 4

Andamento delle temperature su alcuni piatti



Portata di vapore 1

Legame tra la portata di vapore e la portata di liquido

$$V_i = (L_{i+1}h_{i+1} + V_{i-1}H_{i-1} - L_i h_i) / H_i$$

$$V_{N_f} = (L_{N_f+1}h_{N_f+1} + V_{N_f-1}H_{N_f-1} + Fh_F - L_{N_f}h_{N_f}) / H_{N_f}$$

dove:

- h = entalpia del liquido (temperatura, pressione, calore specifico del liquido)
- H = entalpia del vapore (temperatura, pressione, calore specifico del liquido, calore latente di vaporizzazione)



Equazioni empiriche

$$h_i = h_i(x_i, T_i, P_i)$$

$$H_i = H_i(y_i, T_i, P_i)$$

Portata di vapore 2

Semplificazione:

Caso 1. Se si conosce la portata di equilibrio allo stazionario su tutti i piatti (approssimazione grossolana)

$$V_i = \bar{V}_i \quad \text{Valore costante pari alla condizione di equilibrio}$$

altrimenti

Caso 2.

$$V_i = \begin{cases} kV_B / PM_{H_2O} & , i < N_f \\ kV_B / PM_{H_2O} - \Delta_F & , N_f \leq i \leq N - 1 \\ kV_B / PM_{H_2O} - \Delta_F - \Delta_D & , i = N \end{cases}$$

dove:

- V_B = portata del vapore dal ribollitore [kg/min]
- PM = peso molecolare
- k = parametro di tuning

Portata di vapore 3

$$\Delta_F = \frac{F(T_{N_F} - T_F)(C_{EtOH}^s x_F PM_{EtOH} + (1 - x_F) PM_{H_2O})}{CL_{H_2O} PM_{H_2O} (1 - x_F) + CL_{EtOH} PM_{EtOH} x_F}$$

$$\Delta_D = \frac{R(T_{N-1} - T_D)(C_{EtOH}^s x_{N-1} PM_{EtOH} + (1 - x_{N-1}) PM_{H_2O})}{(CL_{H_2O} PM_{H_2O} (1 - x_N) + CL_{EtOH} PM_{EtOH} x_N)}$$

dove:

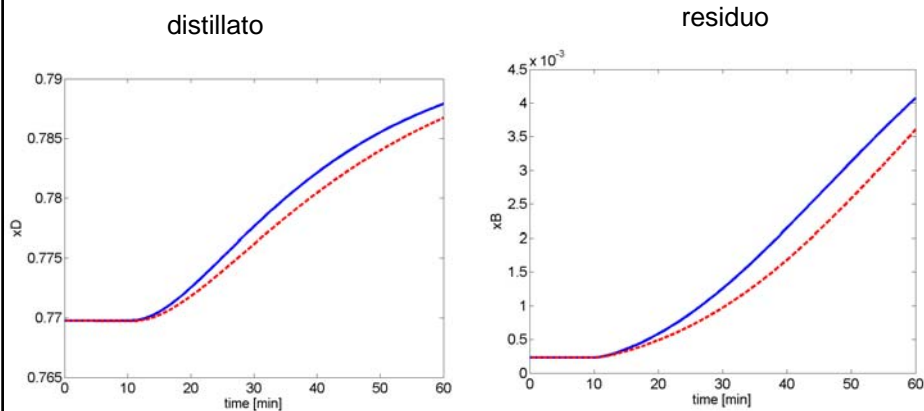
- CL = calore latente
- TF = temperatura del flusso di alimentazione
- TD = temperatura del riflusso

la temperatura a cui vengono immessi l'alimentazione F e il riflusso R sono importanti nei bilanci termici e nell'equilibrio liquido-vapore (termodinamica).

Portata di vapore 4

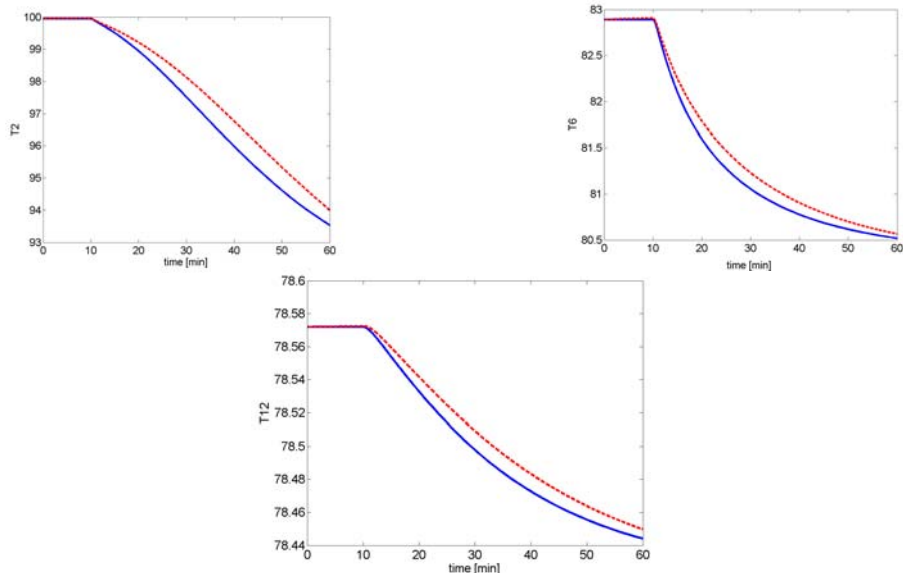
Variazione del 10% sul flusso dell'alimentazione F

Andamento delle concentrazioni del distillato e del residuo



Portata di vapore 5

Andamento delle temperature su alcuni piatti



Equilibrio liquido-vapore 1

Nell'equazione dell'equilibrio liquido vapore del piatto i-esimo

$$y_i = f(x_i, T_i, P_i)$$

intervengono i seguenti fattori:

- coefficiente di attività
- tensione di vapore
- energia di interazione molecolare
- etc.



Approssimazione

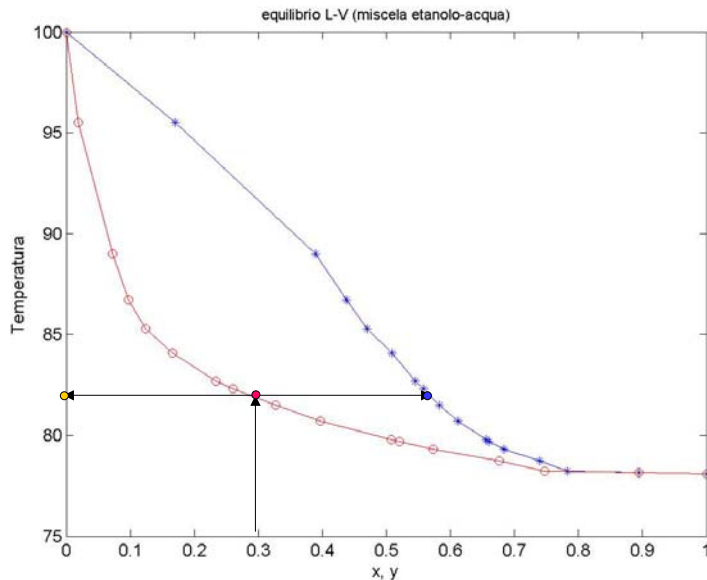
nel modello di stato si scriverà la concentrazione del vapore (e la temperatura) su ogni piatto come funzione (lineare o non lineare) della concentrazione.



Come???

Si costruisce un modello di equilibrio liquido-vapore per punti

Equilibrio liquido-vapore 2



Equilibrio liquido-vapore 3

Per utilizzare lo stesso grafico occorre approssimare che la pressione sia costante lungo tutta la colonna e uguale a quella a cui si riferiscono i dati sperimentali (generalmente la pressione atmosferica).

$$\{x(j), T(j)\}_{j=1, \dots, n} \quad \{y(j), T(j)\}_{j=1, \dots, n}$$

A partire da x_i trovo i valori $x(j)$, $x(j+1)$ più vicini sulla curva di bolla tali che

$$x(j) < x_i < x(j+1)$$

Quindi

$$T_i = T(j) + \frac{T(j+1) - T(j)}{x(j+1) - x(j)}(x_i - x(j))$$

e

$$y_i = y(j) + \frac{y(j+1) - y(j)}{T(j+1) - T(j)}(T_i - T(j))$$

Equilibrio liquido-vapore 5

$$y_i = a_i x_i + b_i$$

Possibili miglioramenti:

- un diagramma liquido-vapore per ogni piatto (cioè per ogni pressione)
- approssimazione polinomiale invece che lineare (es. spline)
- introduzione di un parametro di tuning E (= efficienza del piatto)

$$\tilde{y}_i = a_i x_i + b_i$$

$$y_i = y_{i-1} + E(\tilde{y}_i - y_{i-1})$$

$$y_i = (1 - E)^{i-1}(a_1 x_1 + b_1) + \sum_{k=2}^i (1 - E)^{i-k} E(a_k x_k + b_k)$$

$$\text{con} \quad 0 < E \leq 1$$

Equilibrio liquido-vapore 6

$$y_i = \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 & , i = 1 \\ (1 - E)^{i-1}(a_1 x_1 + b_1) + \sum_{k=2}^i (1 - E)^{i-k} E(a_k x_k + b_k), & i \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \leftarrow \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_i}_{\text{Concentrazioni di tutti i piatti sottostanti.}}; \underbrace{a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i}_{\text{Coefficienti dell'approssimazione lineare del diagramma di equilibrio liquido-vapore.}}$$

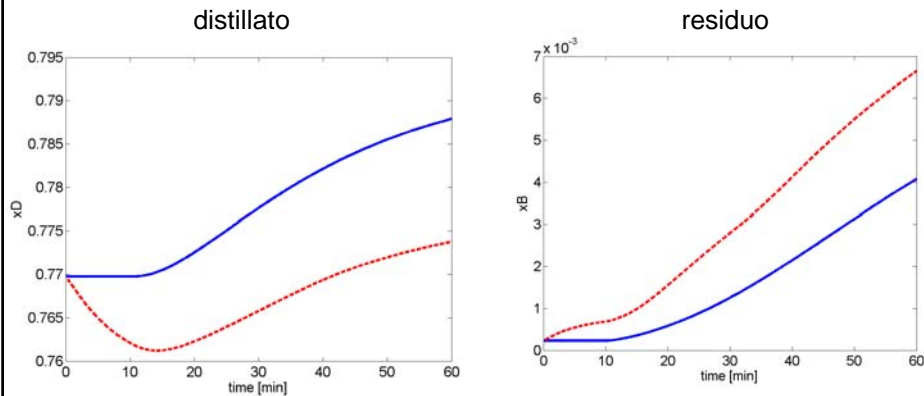
Concentrazioni
di tutti i piatti
sottostanti.

Coefficienti dell'approssimazione
lineare del diagramma di
equilibrio liquido-vapore.

Equilibrio liquido-vapore 7

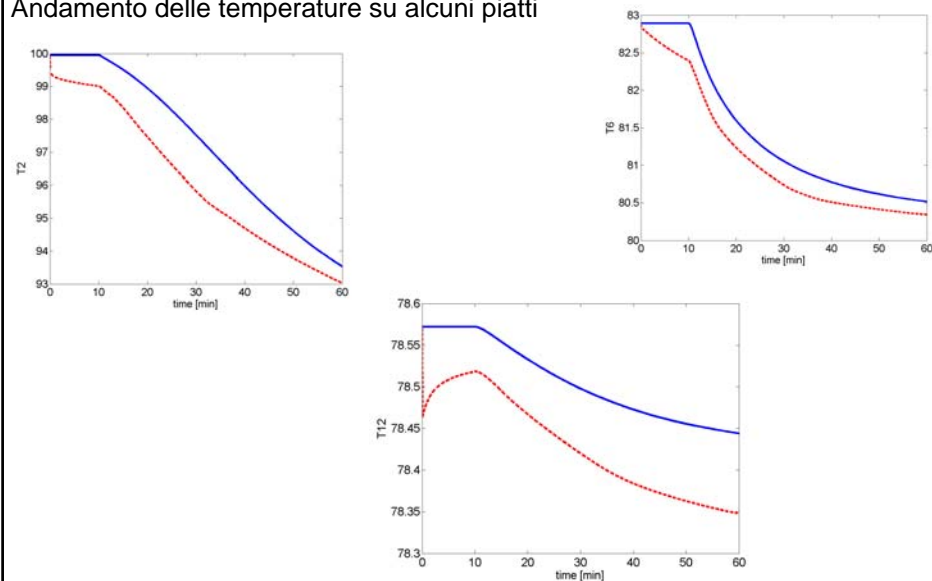
Variazione del 10% sul flusso dell'alimentazione F

Andamento delle concentrazioni del distillato e del residuo



Equilibrio liquido-vapore 8

Andamento delle temperature su alcuni piatti



Modello di stato 1

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_p(t) = f_p(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_p(t), t) \\ \mathbf{y}_p(t) = h_p(\mathbf{x}_p(t), \mathbf{v}_p(t), t) \end{cases} \quad \text{Impianto reale}$$

$$\begin{array}{l} \text{Modello semplificato} \\ \text{del sistema} \end{array} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s(t) = f_s(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_s(t), t) \\ \mathbf{y}_s(t) = h_s(\mathbf{x}_s(t), \mathbf{v}_s(t), t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k), k) \\ \mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Modello} \\ \text{semplificato} \\ \text{discretizzato} \end{array}$$

Modello di stato 2

Equazione di stato

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k), k)$$

Equazione di misura

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k), t)$$

è del tipo

$$T_i = T(j) + \frac{T(j+1) - T(j)}{x(j+1) - x(j)}(x_i - x(j))$$

Le uscite (misure di temperatura) sono legate in modo lineare alle concentrazioni attraverso dei coefficienti tempo-varianti (coefficienti dell'approssimazione lineare).

Filtro di Kalman Esteso 1

Passo di predizione

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = f(\hat{\mathbf{x}}(k|k), \mathbf{u}(k), -, k)$$

Calcolo della varianza a priori

$$\hat{F}(k|k) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k|k)}$$

$$P(k+1|k) = \hat{F}(k|k)P(k|k)\hat{F}^T(k|k) + Q(k)$$

Filtro di Kalman Esteso 2

Calcolo della varianza a posteriori

$$P(k+1|k+1) = [I - L(k+1)\hat{H}(k+1|k)]P(k+1|k)[\cdot]^T + L(k+1)RL^T(k+1)$$

dove

$$\hat{H}(k+1|k) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}(k+1|k)}$$

$$\Lambda(k+1) = \hat{H}(k+1|k)P(k+1|k)\hat{H}^T(k+1|k) + R$$

$$L(k+1) = P(k+1|k)\hat{H}^T(k+1|k)\Lambda^{-1}(k+1)$$

Stima a posteriori

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) + L(k+1)[\mathbf{y}(k+1) - \hat{\mathbf{y}}(k+1|k)]$$

$$\text{dove } \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = h(\hat{\mathbf{x}}(k+1|k), -, k)$$

Discretizzazione

Discretizzazione:

1. risolvere l'equazione differenziale ad ogni intervallo di tempo $[t_k, t_{k+1}]$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = f_s(\bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), -, t)$$

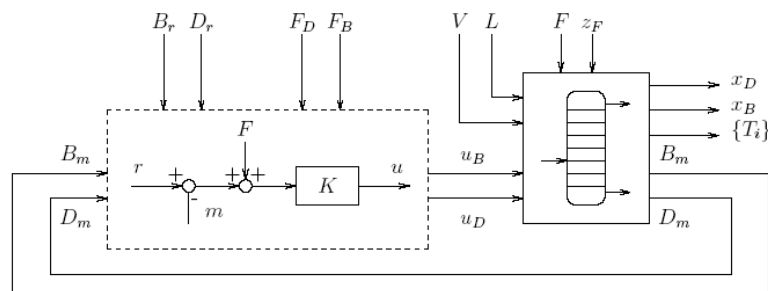
$$\bar{\mathbf{x}}(t_k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \bar{\mathbf{x}}(t_{k+1})$$

2. approssimazione di Eulero.

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k) + (t_{k+1} - t_k) f_s(\hat{\mathbf{x}}(k|k), u(k), -, k)$$

Sistema di controllo



Controllore:

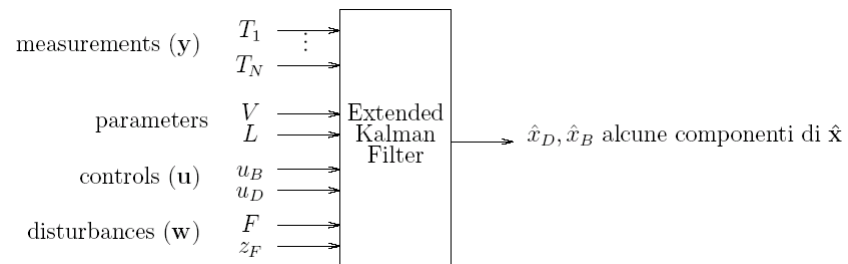
- controllore sul livello di distillato e di residuo (proporzionale P)
- Riflusso costante $L = \text{cost.}$; Vapore costante $V = \text{cost.}$

Misure:

- B_m, D_m : livelli di residuo di distillato
- T_i : temperature sui piatti della colonna

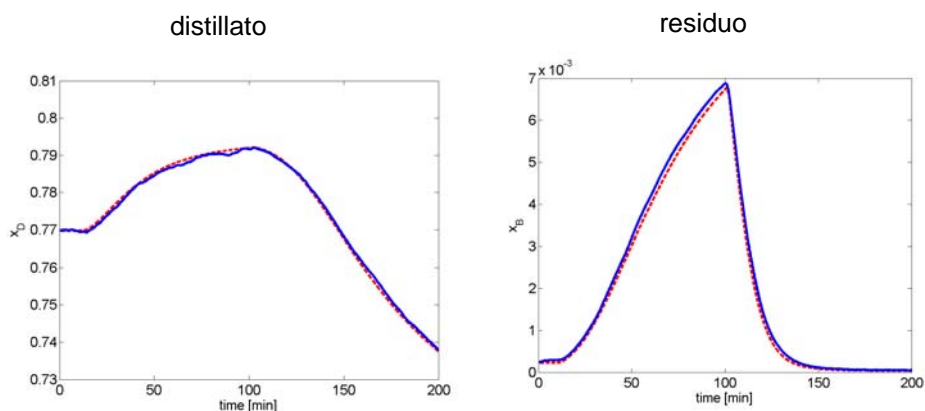
$$u_B = F_B + K_B(B_r - B_m) \quad u_D = F_D + K_D(D_r - D_m)$$

Schema del filtro



Simulazione 1

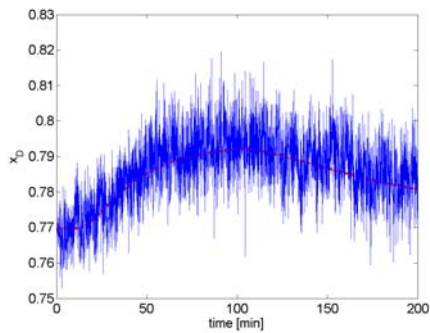
Variazione del 10% sul flusso dell'alimentazione F



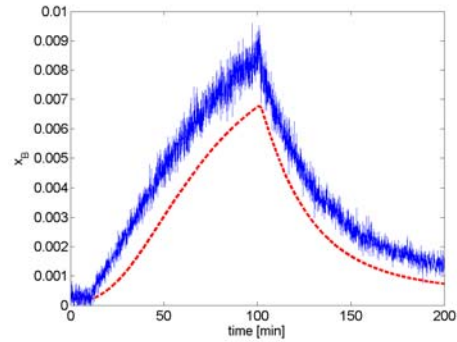
Simulazione 2

Cosa succede se prendo la matrice varianza del rumore di modello troppo grande?

distillato



residuo

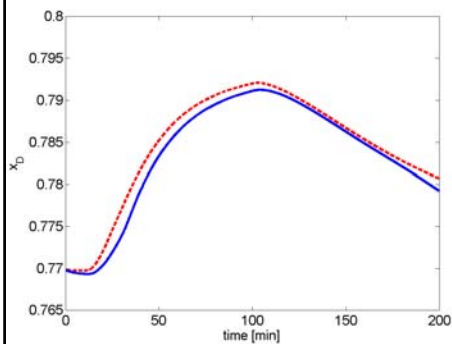


Il filtro 'crede' troppo alle misure

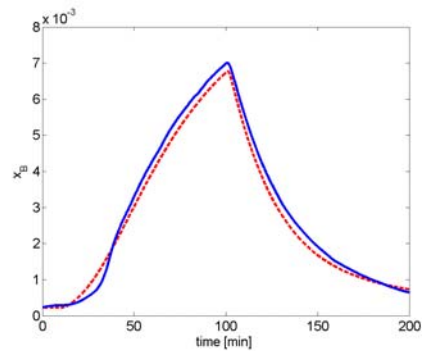
Simulazione 3

Cosa succede se prendo la matrice varianza del rumore di modello troppo piccola?

distillato



residuo



Il filtro 'crede' troppo al modello

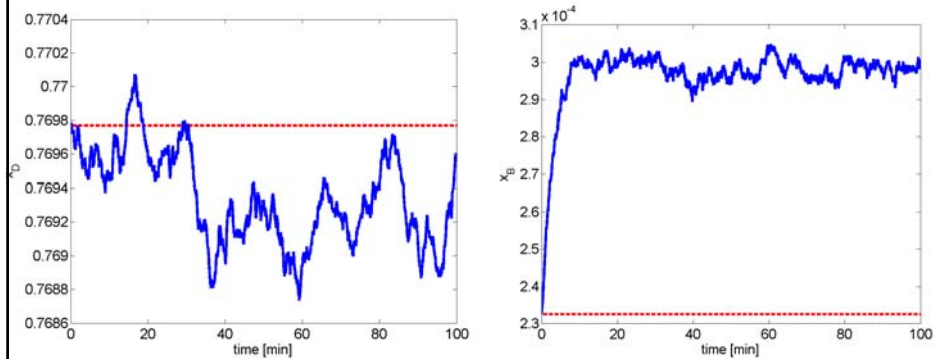
Simulazione 4

Variazione del 10% sulla concentrazione dell'alimentazione zF

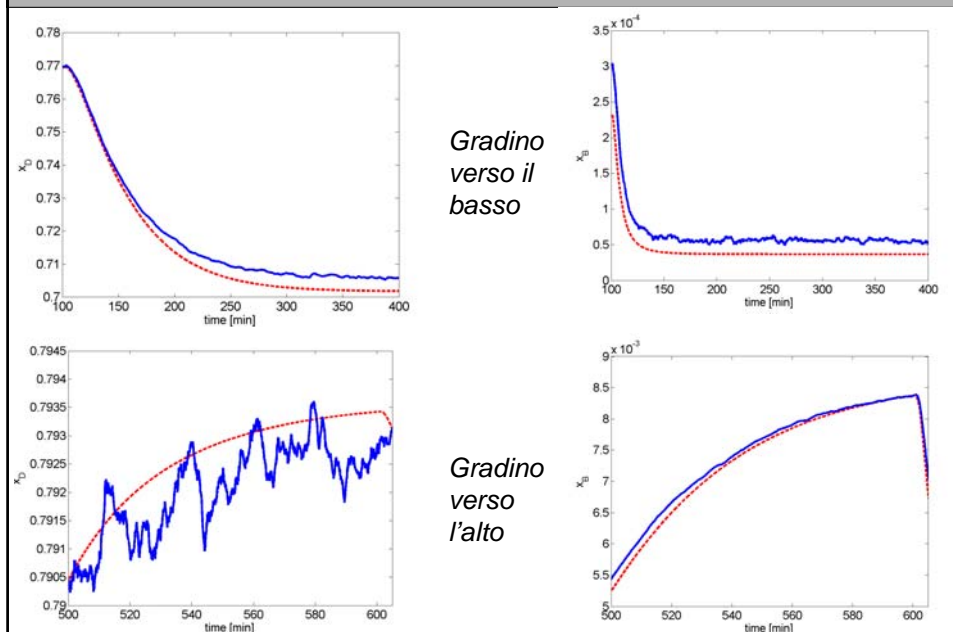
distillato

residuo

Stato stazionario



Simulazione 5



Possibili miglioramenti 1

Questioni aperte:

- Scelta della posizione ottima dei sensori di temperatura (su quali piatti inserire le termocoppie)
- Utilizzo delle stime fornite dall' E.K.F. per il controllo di concentrazione (concentrazione del distillato e del residuo) da affiancare a quello di livello
- Utilizzare l'efficienza come parametro di tuning inserendolo come variabile fittizia nell'equazione di stato del filtro

$$E(k+1) = E(k) + \nu_E(k), \nu_E \sim W(0, \sigma_E)$$

- Idem per la caduta di carico (ΔP)

$$\Delta P(k+1) = \Delta P(k) + \nu_P(k), \nu_P \sim W(0, \sigma_P)$$

Possibili miglioramenti 2

- Verifica della consistenza delle stime di concentrazioni

$$0 \leq x_i \leq 1, \forall i, \forall t_k$$

- Introduzione di variabili di bias per compensare l'approssimazione nell'equilibrio liquido-vapore
- Come modificare la struttura del filtro per utilizzare misure ottenute in ritardo e con frequenza molto più bassa rispetto alle misure di temperatura (misure di concentrazione)
- Controllo sulla consistenza delle misure ottenute (fault detection)