# CORSO DI CONTROLLO DEI PROCESSI

GIORGIO PICCI

Dipartimento di Ingegneria dell'informazione,
Università di Padova, Italy

a.a. 2006/2007

# AUTOMAZIONE/CONTROLLO DI PROCESSI INDUSTRIALI

Ha diverse componenti:

1. Tutta la parte di gestione/controllo di *EVENTI DISCRETI*, es. macchina distributrice del caffè; carico, scarico di materiale comandi di inizio/stop, allarmi etc...

   Importante per la *SICUREZZA E VERIFICA DI MALFUNZIONAMENTI*.

   Attuatori sono di tipo ON/OFF. I controllori sono PLC (Controllori Logici Programmabili), sistemi digitali interconnessi a sensori di varia nuatura attraverso Bus. Progetto logico: **Teoria dei sistemi ad eventi discreti**.

2. Modellistica (messa in equazioni): richiede conoscenze di FISICA DEL PROCESSO. Maggior utente di automazione/controllo dei processi è l' **industria chimica**. In passato non ci si preoccupava di modelli dinamici. Solo modelli statici per le grandezze di regime. Adesso la competizione industriale internazionale è basata sulla **velocità** : unità prodotte per unità di tempo (costi) e sulla **qualità** : tolleranze sulle composizioni dei prodotti sempre più strette! Questo implica l'uso di sistemi di controllo sempre più sofisticati. Occorre tener conto della dinamica dei processi!

3. La **modellistica + simulazione dinamica**: è la chiave di volta per il progetto. Pacchetti sofisticati per la simulazione di sistemi dinamici (e.g. SIMULINK) sono uno strumento sempre più importante. È essenziale imparare ad usarli!

4. Il **controllo vero e proprio** (progetto di controllori, stimatori etc..) è la parte “intelligente” del sistema. Si stima che attualmente solo il 15-20 % del software di controllo dell’impianto sia dedicato all’algoritmo di controllo dinamico vero e proprio. Molto meno ovviamente per i controllori PID che sono normalmente configurati all’interno di sistemi integrati per il controllo logico (PLC) etc.

   L’unico tipo di **controllo basato su modello** usato abbastanza diffusamente in pratica nel controllo dei processi industriali è il cosiddetto **Controllo Predittivo (MPC)**.

# PROGRAMMA DEL CORSO

1. Ripasso Fondamenti di Automatica + Controllo digitale. Assegnazione dei poli (Equazione Diofantea e retroazione dallo stato). Controllo basato sul modello interno.

2. Fondamenti di modellistica di Processi. Principi fondamentali. Modelli di Colonne di Distillazione.

3. Laboratorio: MATLAB/SIMULINK e simulazione di processi

4. Cenni sull'identificazione di modelli; uso del Model Identification Toolbox

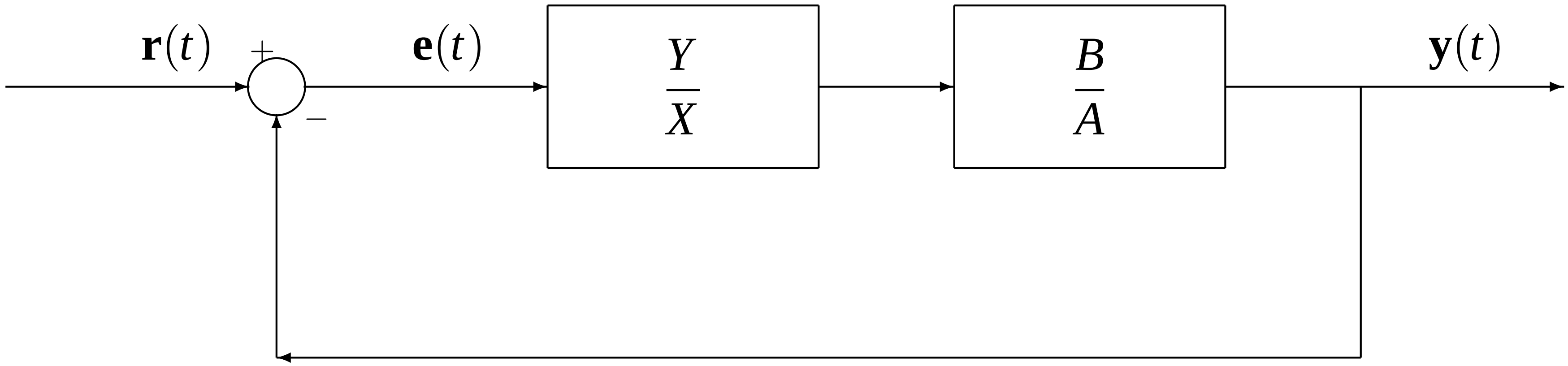
5. Principi fondamentali del controllo predittivo e applicazioni al controllo di sistemi ad un ingresso e una uscita.

# SISTEMI LINEARI DISCRETI SISO

Daremo per nota la teoria dei sistemi a tempo discreto (Corso di Controllo digitale): Trasformata $Z$, funzioni di trasferimento discrete, stabilità etc. .

Operatore di ritardo di un passo : $z^{-1}$

# ASSEGNAZIONE DEI POLI




Controllore a retroazione.

$$W(s) = \frac{BY}{AX + BY} \qquad \Delta := AX + BY$$

# PRODOTTI DI POLINOMI CON LE MATRICI

$$A(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 \qquad X(s) = x_\nu s^\nu + \ldots + x_1 s + x_0$$

Compute $A(s)X(s) := Y(s)$ by matrix operations.

$$\begin{bmatrix} a_n & 0 & & 0 & 0 \\ a_{n-1} & a_n & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_0 & & & \ddots & 0 \\ 0 & a_0 & & \ddots & a_n \\ \vdots & & a_0 & \ddots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\nu \\ \vdots \\ \vdots \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{n+\nu} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}$$

# CASO DISCRETO

$$A(z^{-1}) = a_0 + a_1 z^{-1} \ldots + a_n z^{-n} \qquad X(z^{-1}) = x_0 + x_1 z^{-1} + \ldots + x_\nu z^{-\nu}$$

Compute $A(z^{-1})X(z^{-1}) := Y(z^{-1})$ by matrix operations.

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_n & & & \ddots & 0 \\ 0 & a_n & & \ddots & a_0 \\ \vdots & & a_n & \ddots & a_1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n+\nu} \end{bmatrix}$$

# MASSIMO COMUN DIVISORE (M.C.D.)

Matrice polinomiale $M(s) = \left[M_{ij}(s)\right]_{ij=1,\dots,n}$, $M_{ij}(s)$ polinomi.

$M(s)$ è **unimodulare** se $M(s)^{-1}$ è ancora polinomiale. Vero se e solo se $\det M(s)$ è una costante (non nulla).

**FATTO:** Esiste una matrice uimodulare $\begin{bmatrix} P & S \\ Q & T \end{bmatrix}$ tale che

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & S \\ Q & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

Il polinomio $R$ è il MCD di $A, B$.

# CALCOLO DEL M.C.D.

Sia $\delta(A) \geq \delta(B)$; allora esiste un polinomio $Q_1$ tale che

$$A = Q_1 B + R_1 \qquad \delta(R_1) < \delta(B)$$

ovvero:

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Q_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & R_1 \end{bmatrix},$$

con $\delta(B) > \delta(R_1)$, e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -Q_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

matrice unimodulare.

Iterando, $\delta(R_{i+1}) < \delta(R_i)$ e si arriva ad ottenere resto zero.

# PROVA CHE R È IL MCD

Sia infatti

$$\begin{bmatrix} P & S \\ Q & T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P^* & S^* \\ Q^* & T^* \end{bmatrix}$$

matrice polinomiale. Allora $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RP^* & RS^* \end{bmatrix}$ e $R$ è un divisore comune.

Sia $D$ un divisore comune: $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D\hat{A} & D\hat{B} \end{bmatrix}$; da (1) scende che $R = D(\hat{A}P + \hat{B}Q)$. Quindi ogni $D$ divide $R$.

# RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DIOFANTEA

**TEOREMA 1** *Siano $A$, $B$, $C$ polinomi assegnati. L'equazione Diofantea,*

$$AX + YB = C \quad , \tag{2}$$

1. *ammette soluzioni polinomiali* $(X, Y)$ *se e solo se il* M.C.D. *di* $(A, B)$ *è anche un divisore di* $C$*;*

2. *ammette soluzioni, qualunque sia* $C$*, se e solo se* $(A, B)$ *sono coprimi.*

3. *Una soluzione particolare della* $(2)$ *è data dalla*

$$X_0 = PC_0 \quad , \qquad Y_0 = QC_0 \quad , \tag{3}$$

*dove $P$ e $Q$ (al pari di $S$ e $T$) sono i polinomi nella matrice unimodulare che produce il M.C.D. $R$ di $(A,B)$*

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & S \\ Q & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

*$C_0$ è definito dalla fattorizzazione $C = RC_0$.*

4. *Tutte e sole le soluzioni dell'equazione Diofantea $(2)$ si ottengono sommando ad una soluzione particolare della $(2)$ una qualunque soluzione dell'equazione omogenea $AX + YB = 0$. Queste ultime hanno la forma*

$$X = HB \quad , \qquad Y = -AH \quad , \tag{4}$$

*dove $H$ è un polinomio arbitrario.*

5. *Si assumano $A$ e $B$ coprimi e di gradi rispettivi $\delta(A) = n$ ed $\delta(B) = m$. Esistono allora soluzioni $(\hat{X}, \hat{Y})$ e $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ tali che*

$$\deg(\hat{X}) < m \qquad \deg(\tilde{Y}) < n \tag{5}$$

*indipendentemente dal grado di $C$. Queste sono dette* **soluzioni di grado minimo** *(in $X$ o in $Y$)*

6. *Le soluzioni $(\hat{X}, \hat{Y})$ e $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ soddisfacenti $(5)$ sono* **uniche**.

*La soluzione di grado minimo $\hat{X}$ si ottiene da una soluzione particolare (ad esempio $X_0$ nella $(3)$) come resto della divisione di $X$ per $B$,*

$$X = \hat{Q}B + \hat{X}$$

*e scegliendo $H = \hat{Q}$ nell'addendo soluzione dell'omogenea $(4)$ (in questo modo anche $\hat{Y} = Y + A\hat{Q}$ rimane univocamente determinato).*

# SISTEMI STRETTAMENTE PROPRI: $m < n$ (TEMPO CONTINUO)

Per avere garanzia che il controllore sia **proprio** dobbiamo prendere la soluzione $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ di grado minimo in $Y$; si ha $\delta(\tilde{Y}) = n - 1$ (genericamente).

Qual'è il grado di $\tilde{X}$ ? Dipende dal grado di $C$. Sia $\delta(C) := l$; il grado $\delta(\tilde{X})$ si calcola ragionando sulla matrice $l \times l$ (di Sylvester) di $(A, B)$ che dev'essere quadrata e non singolare dato che $A$ e $B$ sono coprimi. In queste condizioni la soluzione ( di grado minimo in $Y$) è **unica**.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc}
 & \overbrace{\hphantom{a_{n-k+1}\quad a_n \quad \cdots \quad 0}}^{k} & & \overbrace{\hphantom{a_0 \quad \ddots \quad a_0}}^{m+1} & & \overbrace{\hphantom{b_0 \quad \ddots \quad b_m}}^{n}
\end{array} \\
\begin{array}{c} k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
&
\left[\begin{array}{cccc c ccc c ccc}
a_n & 0 & & 0 & \vdots & 0 & & 0 & \vdots & 0 & & 0 \\
a_{n-1} & a_n & & 0 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
a_{n-k+1} & & & \ddots & \vdots & 0 & & 0 & \vdots & 0 & & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1 & & & & \vdots & a_n & & & \vdots & 0 & & 0 \\
a_0 & & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & b_m & & \\
0 & & & \ddots & \vdots & & & a_n & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & a_0 & & & \vdots & b_0 & & b_m \\
 & & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & & 0 & & \vdots & 0 & & a_0 & \vdots & 0 & & b_0
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_{m+k} \\ \vdots \\ x_{m+1} \\ \cdots \\ x_m \\ \vdots \\ x_0 \\ \cdots \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_0
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
c_{n+m+k} \\ \vdots \\ c_{n+m+1} \\ \cdots \\ c_{n+m} \\ \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$l = n+m+k \Rightarrow$ sistema di $n+m+k+1$ equazioni in $n+m+k+1$ incognite.

- Se $l \geq m+n$ allora $\qquad \delta(\tilde{X}) = l-n$

- Se $l < m+n$ allora $\qquad \delta(\tilde{X}) < m$

Nel primo caso, se si assegnano almeno $2n-1$ poli ($l-n \geq n-1$) si ha $\delta(\tilde{X}) \geq n-1$ e il **controllore è proprio** (strettamente se $l = 2n$).

Se si assegnano esattamente $m+n$ poli si ha $\delta(\tilde{X}) = l-n = m$, per cui il controllore è proprio solo se il grado relativo ($n-m$) della f.d.t. dell'impianto è uguale a uno.

Se si assegnano meno di $m+n$ poli ("$k<0$"), $\delta(\tilde{X}) < m \leq n-1$ e il **controllore non è in generale proprio**.

Se $C$ e $A$ sono monici anche il denominatore $X$ è monico.

Esempio: $G(s) = \dfrac{s+2}{(s-3)(s+1)}$ con polinomio caratteristico assegnato

$\Delta(s) = (s+1)(s+2)(s+10) = s^3 + 13s^2 + 32s + 20$ di grado $3 = 2n-1$

Soluzione: $C(s) = 13\dfrac{s+1}{s+2}$ **Cancellazioni !**

**Fatto :** *$X$ e $Y$ hano divisori comuni, rispettivamente a $B$ e ad $A$, (cancellazioni !) se e solo se tali divisori sono comuni anche a $C$.*

Codice MATLAB: `[X,Y]= diopha(A,B,C)`

# TEMPO DISCRETO

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \overbrace{\hspace{11em}}^{k+1} & \overbrace{\hspace{8em}}^{m} & \overbrace{\hspace{8em}}^{n} \end{array} \\
\begin{array}{c} k+1\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
a_0 & 0 & & 0 & \vdots & 0 & & 0 & \vdots & 0 & & 0 \\
a_1 & a_0 & & 0 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
a_k & & & \ddots & \vdots & 0 & & 0 & \vdots & 0 & & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_n & & & & \vdots & a_0 & & & \vdots & 0 & & 0 \\
0 & & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & b_0 & & \\
0 & & & \ddots & \vdots & & & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & \vdots & a_n & & & \vdots & b_m & & b_0 \\
 & & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & & 0 & & \vdots & 0 & & a_n & \vdots & 0 & & b_m
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
x_0 \\ \vdots \\ x_k \\ \cdots \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+m} \\ \cdots \\ y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
c_0 \\ \vdots \\ c_k \\ \cdots \\ c_{k+1} \\ \vdots \\ c_{k+m} \\ \cdots \\ c_{k+m+1} \\ \vdots \\ c_{k+m+n}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

# LA TEORIA DEL REGOLATORE DAL PUNTO DI VISTA INGRESSO-USCITA

Vedere T. Kailath, *Linear System Theory* pp. 297–311