Cenni di Programmazione Lineare

Domenico Salvagnin

2011-10-21

Un problema di programmazione lineare consiste nella minimizzazione di una funzione lineare soggetta ad un numero finito di vincoli lineari. In generale si ha la forma:

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ & a_i x \sim b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & l_j \leq x_j \leq u_j \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{1}$$

dove $\sim \in \{\leq, \geq, =\}$, $l_j \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $u_j \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pertanto i domini delle singole x_j sono intervalli di $\mathbb{R}$.

1 Formulazioni equivalenti

Un problema di programmazione lineare puó essere espresso in vari modi equivalenti. Senza perdita di generalitá, è possibile assumere che il problema sia espresso in forma *standard*

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

o in forma *canonica*

$$\begin{aligned} \min\ & cx \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Il passaggio da una forma all'altra puó richiedere una variazione del numero di variabili e/o vincoli del problema. In particolare si hanno le seguenti regole di trasformazione:

1. conversione da massimizzazione a minimizzazione

$$\max(cx) = -\min(-wx)$$

2. conversione da vincoli "$\geq$" a vincoli "$=$"

$$a_i x \geq b_i \Longleftrightarrow \begin{cases} a_i x - s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

3. conversione da vincoli "$\leq$" a vincoli "$=$"

$$a_i x \leq b_i \iff \begin{cases} a_i x + s_i = b_i \\ s_i \geq 0 \end{cases}$$

4. conversione da vincoli "$=$" a vincoli "$\geq$"

$$a_i x = b_i \iff \begin{cases} a_i x \geq b_i \\ -a_i x \geq -b_i \end{cases}$$

5. conversione da variabili libere a non negative

$$x_i \text{ libera} \iff \begin{cases} x_i = x_i^+ - x_i^- \\ x_i^+, x_i^- \geq 0 \end{cases}$$

6. conversione da lower bound generico a variabile non negativa

$$x_i \geq l_i \iff \begin{cases} x_i = x_i' + l_i \\ x_i' \geq 0 \end{cases}$$

7. conversione da upper bound generico a variabile non negativa

$$x_i \leq u_i \iff \begin{cases} x_i = u_i - x_i' \\ x_i' \geq 0 \end{cases}$$

8. conversione da variabile bounded a variabili non negative

$$l_i \leq x_i \leq u_i \iff \begin{cases} x_i = x_i' + l_i \\ x_i' + s_i = u_i - l_i \\ x_i', s_i \geq 0 \end{cases}$$

2 Interpretazione geometrica

Definizione 2.1. *Gli insiemi* $\{x \in \mathcal{R}^n : ax \leq a_0\}$ *e* $\{x \in \mathcal{R}^n : ax = a_0\}$ *si dicono* semispazio affine *e* iperpiano *(rispettivamente) indotti da* (a, a_0)*.*

Definizione 2.2. *Si dice* poliedro *l'intersezione di un numero* finito *di semispazi affini ed iperpiani.*

L'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di programmazione lineare è pertanto per definizione un poliedro. Un poliedro limitato si dice *politopo*.

La descrizione di un politopo come intersezione di un numero finito di vincoli lineari viene detta descrizione *esterna*. Esiste una descrizione equivalente, detta *interna*, basata sul concetto di vertice.

Definizione 2.3. *Si dice* vertice *di un poliedro un punto* x *che non puó essere espresso come combinazione convessa stretta di altri due punti del poliedro.*

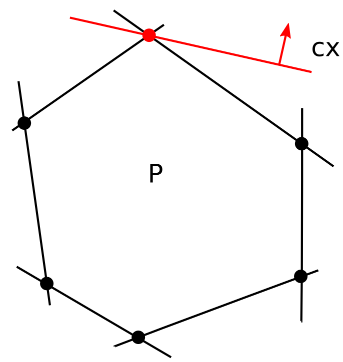

Figure 1: Interpretazione geometrica del teorema fondamentale della programmazione lineare.

Ogni politopo ha un numero finito di vertici e vale il seguente teorema:

Teorema 2.1. *Ogni punto di un politopo puó essere espresso come combinazione convessa dei suoi vertici* $\{x_1, \ldots, x_t\}$.

$$x \in P \iff \begin{cases} x = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j x_j \\ \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

Una importante conseguenza della descrizione interna di un politopo è la seguente:

Teorema 2.2. *Se il problema di programmazione lineare* $\min\{cx : x \in P\}$ *ammette ottimo finito, allora esiste un vertice di* P *ottimo.*

Una rappresentazione grafica dei precedenti risultati è disponibile in Figura 1.

Il teorema precedente afferma che nonostante il numero di soluzioni di un problema di programmazione lineare sia infinito, possiamo restringere la ricerca della soluzione ottima ad un sottoinsieme finito (i vertici). Questo è proprio l'approccio seguito dal principale algoritmo di risoluzione per problemi LP, cioé l'algoritmo del *simplesso.* Tale algoritmo, partendo da un vertice qualsiasi, si muove in modo greedy ad un vertice vicino non peggiore ad ogni iterazione, fino a trovare un vertice ottimo.

3 Dualitá

Consideriamo un problema di programmazione lineare in forma standard e assumiamo per semplicitá che ammetta ottimo finito. Abbiamo visto che in generale è possibile associare ad ogni problema di ottimizzazione un problema duale, il cui scopo è di derivare dai vincoli (e domini) del problema il miglior lower bound possibile sulla funzione obiettivo. Nel caso lineare si ha

$$\min\{cx : x \in P\} = \max\{c_0 : cx \geq c_0 \ \forall x \in P\}$$

In altre parole, si vuole trovare il piú grande termine noto c_0 tale che la disuguaglianza $cx \geq c_0$ sia valida per P, cioé sia soddisfatta da tutte le soluzioni ammissibili di P.

Il seguente teorema caratterizza l'insieme di tutte e sole le disuguaglianze valide per un problema in forma standard:

Teorema 3.1. *Sia P definito dal sistema $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$. Una disuguaglianza $cx \geq c_0$ è valida per P se e solo se esiste un vettore di moltiplicatori u tale che $c \geq uA$ e $c_0 \leq ub$.*

Il teorema precedente (che prende il nome di lemma di Farkas) afferma che tutte le disuguaglianze valide posso essere ottenute tramite combinazioni lineari dei vincoli originari del problema, e permette di formulare il problema duale in forma esplicita. Si ha infatti:

$$\max\{c_0 : cx \geq c_0 \ \forall x \in P\} = \begin{cases} \max ub \\ uA \leq c \end{cases}$$

Il lemma di Farkas puó essere facilmente generalizzato a problemi LP non in forma standard. Valgono in fatti le seguenti regole di trasformazione da primale a duale:

primale	duale
min	max
$a_i x \geq b$	$u_i \geq 0$
$a_i x \leq b$	$u_i \leq 0$
$a_i x = b$	u_i libera
$x_j \geq 0$	$uA_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$uA_j \geq c_j$
x_j libera	$uA_j = c_j$