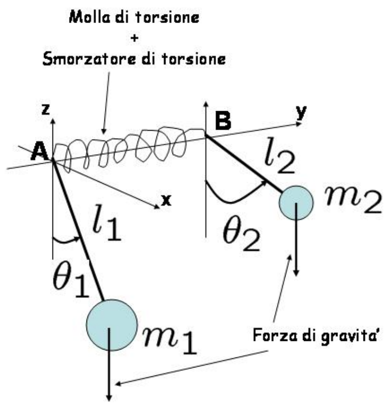
Corso di laurea in Ingegneria dell'Informazione
Prova di laboratorio di Fondamenti di Automatica

Svolgere i seguenti esercizi, facendo uso dei pacchetti MATLAB e SIMULINK. È richiesta una breve relazione, corredata del codice usato e dei grafici prodotti, con un commento dei passi svolti e dei risultati conseguiti. La relazione va spedita tramite posta elettronica in formato `pdf` all'indirizzo `schenato@dei.unipd.it`

Si considerino i due pendoli come indicato in figura: I due pendoli sono in grado di



ruotare attorno all'asse y per effetto della forza di gravita' e sono interconnessi da una barra metallica. La barra metallica come una molla torsionale dotata di uno smorzatore di velocita'. Il momento torcente della molla rispetto al vincolo A del primo pendolo puo' essere modellato come

$$\tau_k = -k(\theta_1 - \theta_2),$$

mentre l'effetto di smorzamento e' approssimato come

$$\tau_b = -b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2),$$

dove $k = 7$ $[Nm/rad]$ e $b = 4$ $[Nm/(rad/sec)]$. Si considerino i seguenti parametri per i due pendoli: $m_1 = 1.2$ $[kg]$, $m_2 = 0.3$ $[kg]$, $l_1 = 1.3$ $[m]$, e $l_1 = 0.5$ $[m]$. Si assuma inoltre che sia possibile generare un momento torcente u sul vincolo A del primo pendolo.

a. si trovino le equazioni della dinamica degli angoli del doppio pendolo e si consideri il punto di equilibrio corrispondente alla posizione verticale di entrambi pendoli, cioe' $\theta_1^* = \theta_2^* = 180^o$. Si linearizzi la dinamica rispetto a questo punto di lavoro e si trovino la funzione di trasferimento $P_1(s)$ tra l'ingresso u l'angolo θ_1 e la funzione di trasferimento $P_2(s)$ tra l'ingresso u l'angolo θ_2. Si verifichi che le risposte a gradino unitario dall'ingresso u all'angolo del secondo pendolo θ_2 del sistema nonlineare e linearizzato coincidano con quelle ottenute con il codice *MATLAB* e *SIMULINK* fornito.

b. si consideri ora la funzione di trasferimento $P_1(s)$ e proceda alla progettazione di un controllore $C_1(s)$ tale che stabilizzi l'angolo θ_1 (vedere Fig. 1.a):
   - abbia struttura PD, $C_1(s) = K_p + K_d s$.
   - il tempo di assestamento del sistema a catena chiusa ad un impulso unitario tra ingresso u e l'angolo θ_1 sia $t_s \leq 3sec$.

c. si consideri ora la funzione di trasferimento $P_{12}^c(s)$ tra l'ingresso u e l'angolo θ_2 dopo l'inserimento del controllore $C_1(s)$, ovvero $P_{12}^c(s) = P_1^c(s)P_2(s)$ come indicato in Fig. 1.b. Si progetti un secondo controllore $C_2(s)$, in modo tale da soddisfare le seguenti specifiche:

- struttura: PI
- errore di inseguimento, e, al gradino unitario r nullo a regime (vedi Fig. 1-c).
- massima sovraelongazione $S \leq 5\%$
- minimizzi il tempo di assestamento, che deve essere comunque inferiore a $t_s \leq 2sec$.

d. si confronti la risposta a gradino di ampiezza $r = 10^0$ rispetto alla verticale per il sistema linearizzato e per il sistema nonlineare in catena chiusa dopo l'inserimento anche del secondo controllore C_2. Si ripeta per $r = 90^0$.

e. si consideri un disturbo sinusoidale all'ingresso u dovuto all'effetto del vento. Si consideri un disturbo del tipo $d = 10\,[N.m]$. Si ripeta per $d = 10\sin(10t)\,[N.m]$.

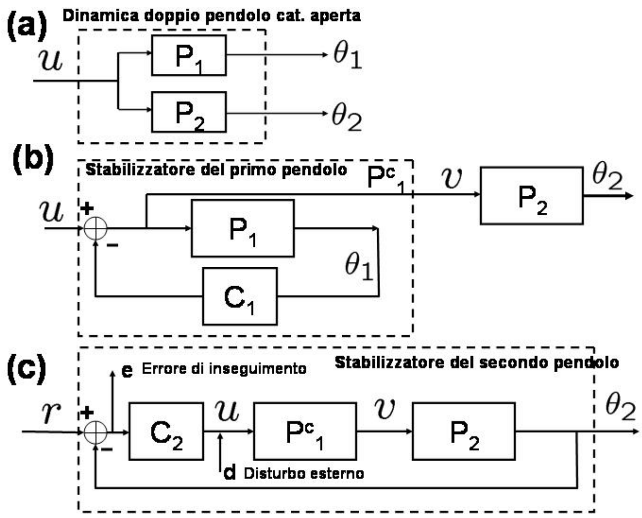


Figura 1: Diagramma a blocchi della dinamica dell'elicottero e dei controllori

1 Soluzione

Le equazioni della dinamica per i due pendoli sono le seguenti:

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -k(\theta_1 - \theta_2) - b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - m_1 l_1 g \sin\theta_1 + u \quad (1)$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = +k(\theta_1 - \theta_2) + b(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - m_2 l_2 g \sin\theta_2 \quad (2)$$

Si consideri la linearizzazione rispetto al punto di equilibrio e si definiscano $\delta\theta_1 = \theta_1 - \pi$ e $\delta\theta_2 = \theta_2 - \pi$. Le equazioni della dinamica linearizzata risultano essere:

$$J_1\delta\ddot{\theta}_1 = -k(\delta\theta_1 - \delta\theta_2) - b(\delta\dot{\theta}_1 - \delta\dot{\theta}_2) + m_1 l_1 g\delta\theta_1 + u \quad (3)$$

$$J_2\delta\ddot{\theta}_2 = +k(\delta\theta_1 - \delta\theta_2) + b(\delta\dot{\theta}_1 - \delta\dot{\theta}_2) + m_2 l_2 g\delta\theta_2 \quad (4)$$

Dopo aver utilizzato la trasformata di Laplace:

$$J_1 s^2\,\delta\Theta_1 = -k(\delta\Theta_1 - \delta\Theta_2) - bs(\delta\Theta_1 - \delta\Theta_2) + m_1 l_1 g\delta\Theta_1 + U \quad (5)$$

$$J_2 s^2\,\delta\Theta_2 = +k(\delta\Theta_1 - \delta\Theta_2) + bs(\delta\Theta_1 - \delta\Theta_2) + m_2 l_2 g\delta\Theta_2 \quad (6)$$

dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$(J_1 s^2 + bs + k - m_1 l_1 g)\delta\Theta_1 = (bs + k)\delta\Theta_2 + U \quad (7)$$

$$(J_2 s^2 + bs + k - m_2 l_2 g)\delta\Theta_2 = (bs + k)\delta\Theta_1 \quad (8)$$

Le funzioni di trasferimento sono quindi:

$$\delta\Theta_1 = \frac{J_2 s^2 + bs + k - m_2 l_2 g}{J_1 J_2 s^4 + b(J_1 + J_2)s^3 + (k(J_1 + J_2) - g(m_1 l_1 J_2 + m_2 l_2 J_1))s^2 - bg(m_1 l_1 + m_2 l_2)s + m_1 m_2 l_1 l_2 g^2 - kg(m_1 l_1 + m_2 l_2)} U$$

$$\delta\Theta_2 = \frac{bs + k}{J_1 J_2 s^4 + b(J_1 + J_2)s^3 + (k(J_1 + J_2) - g(m_1 l_1 J_2 + m_2 l_2 J_1))s^2 - bg(m_1 l_1 + m_2 l_2)s + m_1 m_2 l_1 l_2 g^2 - kg(m_1 l_1 + m_2 l_2)} U$$

Dopo aver utilizzato *SISOtool* si trova che il seguente controllore PD soddisfa le specifiche:

$$C_1(s) = 25s + 50$$

Si osservi che $P_1^c = \frac{1}{1+P_1C_1}$, quindi la funzione di trasferimento dall'ingresso u all'angolo θ_2 dopo l'inserimento del controllore C_1 e' data da $P_{12}^c = P_1^c P_2 = \frac{P2}{1+P_1C_1}$.

Si riutilizza nuovamente *SISOtool* per la progettazione di C_2. Un controllore che soddisfa le specifiche e' il seguente:

$$C_2(s) = \frac{108}{s} + 108$$