

1.1 Motore CC con motoriduttore e carica

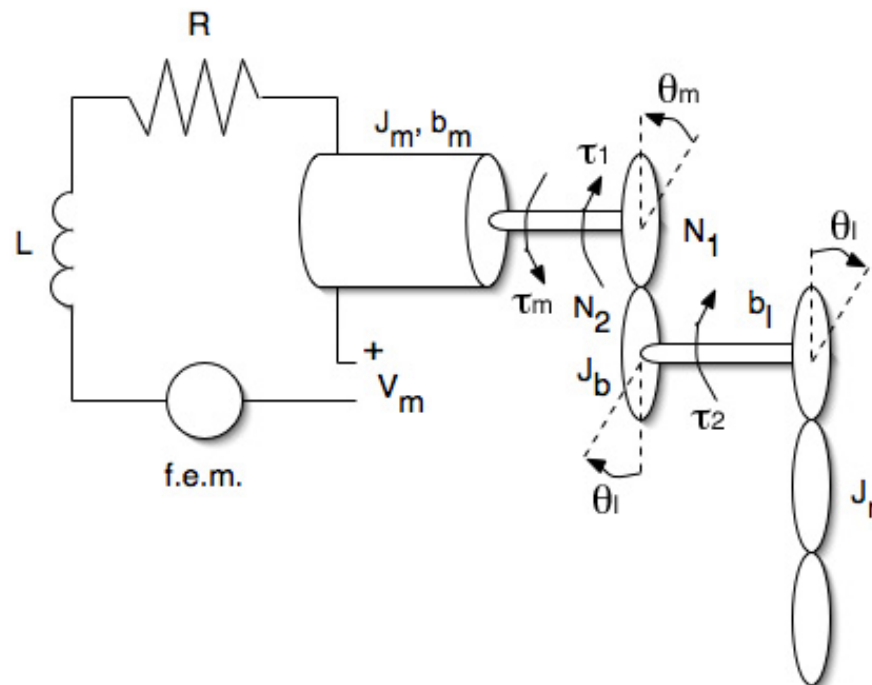


Figura 1.1. Schema meccanico dell'apparato sperimentale.

IPOTESI

- 1) le ruote dentate non slittano $\Rightarrow \theta_m N_1 = \theta_l N_2$
- 2) il motoriduttore non dissipa energia $\Rightarrow \tau_1 \dot{\theta}_m = \tau_2 \dot{\theta}_l$ in altre parole la potenza in entrata e' uguale alla potenza in uscita nelle due ruote dentate
- 3) l'induttanza motore elettrico e' trascurabile $\Rightarrow L = 0$.
 NOTA: E' possibile verificare a posteriori tale ipotesi controllando i poli del motore con il polo elettrico $p_i = -\frac{R}{L}$.

Parametro	Descrizione
V_m	Tensione di ingresso al motore
τ_m	Momento torcente applicato dal motore
τ_1	Momento torcente reattivo sulle ruote del motore
$\tau_2 = \tau_b$	Momento torcente applicato alla base del motoriduttore
τ_l	Momento torcente reattivo dovuto al carico
θ_m	Angolo del rotore del motore
θ_l	Angolo della base del motore
b_m	Coefficiente d'attrito viscoso del motore
b_l	Coefficiente d'attrito viscoso della base
J_m	Momento d'inerzia del motore
J_b	Momento d'inerzia della base
$J_l = m^2 l$	Momento d'inerzia dovuto al carico
m	Massa del pendolo
l	distanza centro di massa del pendolo dal vincolo
J_r	Momento d'inerzia di una ruota dentata
$N_1 = N_m$	Numero di denti della ruota dentata del motore
$N_2 = N_l$	Numero di denti della ruota dentata della base

Tabella 1.1. Descrizione dei parametri del modello meccanico.

PARTE ELETTRICA DEL MOTORE

$$V_m = Ri + K_\phi \dot{\theta}_m \quad (1.1)$$

$$\tau_m = K_\phi i \quad (1.2)$$

PARTE MECCANICA DEL MOTORE

$$J_m \ddot{\theta}_m = \tau_m - b_m \dot{\theta}_m - \tau_1 \quad (1.3)$$

$$(J_b + J_l) \ddot{\theta}_l = \tau_b - b_l \dot{\theta}_l - mgl \sin(\theta_l) \quad (1.4)$$

Si noti che in quest'ultima equazione J_l si somma a J_b dal momento che il pendolo e' attaccato rigidamente alla base e quindi contribuisce all'inerzia.

OBIETTIVO

Trovare $\theta_l(s) = P(s)V_m(s)$, cioè la dinamica dell'angolo di uscita rispetto al controllo. In tale equazione $\theta_l(s)$ svolge il ruolo di uscita y e $V_m(s)$ il ruolo di ingresso u .

Sia

$$N = \frac{N_l}{N_m}.$$

Sostituiamo in (1.3) le equazioni $\theta_m = N\theta_l$ e $\tau_1 = \frac{\dot{\theta}_l}{\dot{\theta}_m}\tau_b = \frac{1}{N}\tau_b$ ottenendo

$$J_m N \ddot{\theta}_l = \tau_m - b_m N \dot{\theta}_l - \frac{\tau_b}{N}$$

da cui

$$(J_m N^2) \ddot{\theta}_l = N \tau_m - (b_m N^2) \dot{\theta}_l - \tau_b. \quad (1.5)$$

Sostituiamo τ_b ottenuto in (1.5) in (1.4) e otteniamo

$$(J_b + J_l) \ddot{\theta}_l = N \tau_m - (b_m N^2) \dot{\theta}_l - (J_m N^2) \ddot{\theta}_l - b_l \dot{\theta}_l - mgl \sin(\theta_l)$$

da cui

$$(J_l + J_b + N^2 J_m) \ddot{\theta}_l = -(b_l + N^2 b_m) \dot{\theta}_l - mgl \sin(\theta_l) + N \tau_m. \quad (1.6)$$

Quest'ultima equazione rappresenta *la dinamica della parte meccanica*.

Notare che è possibile definire

$$\begin{aligned} J_{eq} &\triangleq J_b + J_l + N^2 J_m \\ b_{eq} &\triangleq b_l + N^2 b_m \\ \tau_m^{eq} &\triangleq N \tau_m \end{aligned}$$

da cui

$$J_{eq} \ddot{\theta}_l = -b_{eq} \dot{\theta}_l - mgl \sin \theta_l + \tau_m^{eq}. \quad (1.7)$$

Calcoliamo ora la dinamica della parte elettrica:

$$V_m = Ri + K_\Phi N \dot{\theta}_l \quad (1.8)$$

$$\tau_m = K_\Phi i \quad (1.9)$$

$$J_{eq} \ddot{\theta}_l = -b_{eq} \dot{\theta}_l - mgl \sin \theta_l + N \tau_m \quad (1.10)$$

$$(1.11)$$

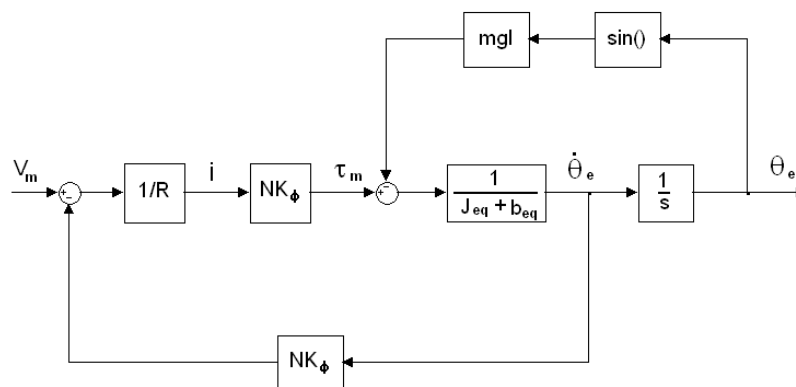


Figura 1.2. Modello in diagramma a blocchi.

CASI PARTICOLARI

(A) non c'è il pendolo dunque $m = 0$.

$$\begin{aligned} J_{eq} &= J_m N^2 + J_l \\ b_{eq} &= b_l + N^2 b_m \\ K_{\phi}^{eq} &= N K_{\phi} \\ \tau_m^{eq} &= N \tau_m \end{aligned}$$

Abbiamo che

$$\theta_l(s) = P(s) V_m(s)$$

da cui

$$P(s) = \frac{N K_{\phi}}{J_{eq} R s + (R b_{eq} + N^2 K_{\phi}^2)} = \frac{K^*}{s(s + p)}$$

ove si è posto

$$K^* = \frac{N K_{\phi}}{J_{eq} R}, \quad p = \frac{R b_{eq} + N^2 K_{\phi}^2}{J_{eq} R}.$$

Si noti che questo rappresenta il modello usuale per motore elettrico ove K^* e p sono diversi.

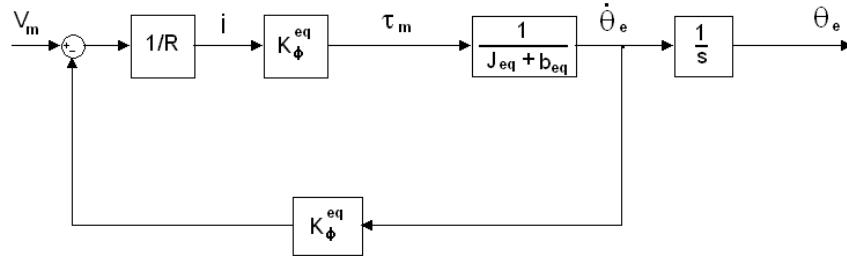


Figura 1.3. Stesso modello di motore elettrico senza la base Uniche differenze sono il calcolo di J_{eq} , b_{eq} e K_{ϕ}^{eq} .

- (B) Supponiamo che i segnali in gioco siano piccoli. Dunque possiamo supporre ragionevole l'approssimazione $\sin \theta_l \approx \theta_l$. Sia

$$\begin{cases} V_m = Ri + K_{eq}\dot{\theta}_l \\ \tau_m^{eq} = K_{\phi}^{eq}i = \frac{K_{eq}}{R} (V_m - K_{\phi}^{eq}\dot{\theta}_l) \\ J_{eq}\ddot{\theta}_l = -b_{eq}\dot{\theta}_l - mgl\theta_l + \tau_m^{eq} \end{cases}$$

Da queste equazioni si ha che

$$J_{eq}\ddot{\theta}_l = -b_{eq}\dot{\theta}_l - mgl\theta_l + \frac{K_{\phi}^{eq}}{R} (V_m - K_{\phi}^{eq}\dot{\theta}_l)$$

da cui

$$RJ_{eq}\ddot{\theta}_l = - (Rb_{eq} + (K_{\phi}^{eq})^2) \dot{\theta}_l - mglR\theta_l + K_{eq}^{eq}V_m$$

Dunque in termini di funzione di trasferimento abbiamo che

$$\theta_l(s) = T(s)V_m(s)$$

ove

$$T(s) = \frac{K_{\phi}^{eq}}{J_m R s^2 + (Rb_{eq} + (K_{\phi}^{eq})^2)s + mglR} = \frac{\gamma}{s^2 + \alpha s + \beta}$$

avendo posto

$$\gamma = \frac{K_{\phi}^{eq}}{J_m R}, \quad \alpha = \frac{Rb_{eq} + (K_{\phi}^{eq})^2}{J_m R}, \quad \beta = \frac{mgl}{J_{eq}}$$

Si noti che $T(s)$ rappresenta un sistema del secondo ordine.

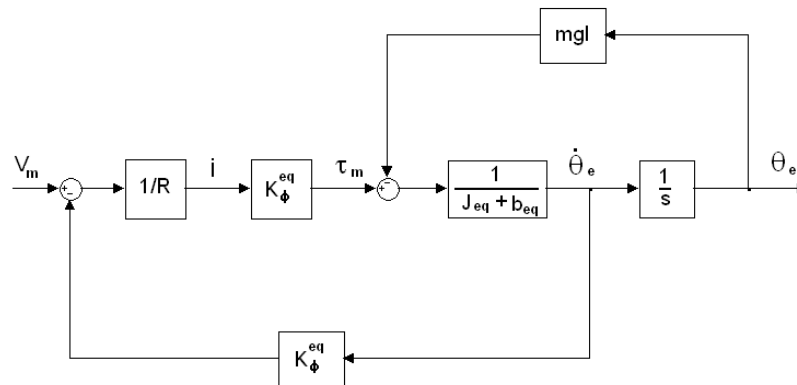


Figura 1.4. modello diagramma a blocchi

1.2 Motore in laboratorio

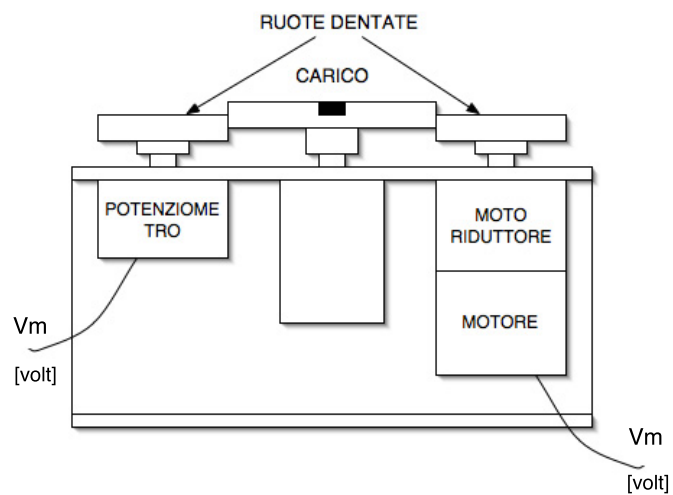


Figura 1.5. Vista laterale dell'apparato meccanico.

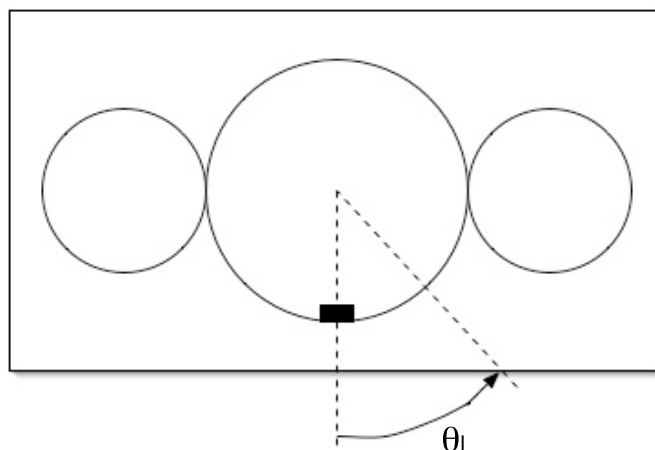


Figura 1.6. Vista superiore dell'apparato meccanico.

1.2.1 Parametri del motore

Parametro	Valore	Unità di misura
k_ϕ	0.00767	<i>volt/(rad/sec)</i>
k_T	1.63	<i>volt/rad</i>
R	2.6	Ω
L	$0.18 * 10^{-3}$	H
N	14	
J_b	$3 * 10^{-5}$	$kg * m^2$
J_r	$1.4 * 10^{-6}$	$kg * m^2$
J_m	$3.87 * 10^{-7}$	$kg * m^2$

Tabella 1.2. Valori nominali del motore.

Dai dati riportati in tabella otteniamo:

$$K_\phi^{eq} = N * K_\phi = 0.1074 [Volt/(rad/s)]$$

$$J_{eq} = J_b + 3J_r + N^2 J_m = 1.1 * 10^{-4} [kgm^2]$$

$b_m, b_r = ??$ non sono noti, quindi devono essere stimati.