LabCont1: Laboratorio di Controlli 1	**II Trim. 2007**

Lezione 2 — 18 Gennaio

Docente: Luca Schenato *Stesori: Paolo Ticozzi, Alberto Tonello, Elia Barban*

2.1 Richiami di segnali e sistemi

Prima di addentrarci nelle tematiche specifiche di questo corso, faremo dei richiami a dei concetti già noti quali:

1. Trasformata di Laplace e sue propriet principali
2. Rappresentazione dei sistemi dinamici lineari
3. Sistemi del secondo ordine

2.1.1 Trasformata di Laplace, proprietà

Trasformata di Laplace unilatera: Sia $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(t) = 0, \forall t < 0$. Si definisce trasformata unilatera di Laplace della funzione $f(t)$ la funzione $F(s) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.1}$$

È possibile pure definire l'antitrasformata di Laplace per una generica funzione complessa $F(s)$, indicata con $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$. In questo corso ci limiteremo a funzioni razionali o dovute a ritardi.

Proprietà

- trasformata della derivata

$$\mathcal{L}[\frac{d}{dt}f(t)] = sF(s) - f(0) \tag{2.2}$$

- definiamo la convoluzione di due funzioni $f(t), g(t)$ come $f*g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ in quanto $g(t), f(t)$ sono nulle per $t < 0$. La trasformata della convoluzione e antitrasformata del prodotto

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f(t)]\mathcal{L}[g(t)] \tag{2.3}$$
$$\mathcal{L}^{-1}[FG] = f(t) * g(t) \tag{2.4}$$

- trasformate notevoli

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \tag{2.5}$$

$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s} \qquad \text{con } 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \qquad \text{con } a \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

$$\mathcal{L}[\alpha_1 \sin(bt)e^{at} + \alpha_2 \cos(bt)e^{at}] = \beta\frac{1}{s-p} + \bar{\beta}\frac{1}{s-\bar{p}} \quad \text{con } \begin{cases} p = a + jb \\ \beta = \frac{1}{2}(\alpha_2 - j\alpha_1) \end{cases} \tag{2.8}$$

$$= \frac{\alpha_2 s + (b\alpha_1 - a\alpha_2)}{(s-a)^2 + b^2} \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s}\mathcal{L}[f(t)] \tag{2.10}$$

2.1.2 Rappresentazione dei sistemi dinamici

Esistono quattro modi diversi per la rappresentazione dei sistemi dinamici, andremo ora a ricordarli e vedremo come si può passare da una rappresentazione all'altra:

1. **Equazioni differenziali:** $\{\mathbf{a_i}, \mathbf{b_i}\}_{\mathbf{i=0}}^{\mathbf{n}}$

$$y^{(n)}(t) = -a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... - a_0 y(t) + B_m u^{(m)}(t) + ... + b_0 u(t) \tag{2.11}$$

   dove considereremo solo sistemi causali, cioé sistemi la cui uscita $y(t)$ dipende solamente dal passato dell'ingresso $u(t)$. Questo e' equivalente a restringerci al caso in cui $m \leq n$.

2. **Funzione di trasferimento: $\mathbf{P(s)}$**

   Applicando la trasformata di Laplace all'Equazione 2.11 e riarrangiandone i termini si ottiene:

$$s^n Y(s) - s^{n-1}y^{(n-1)}(0) = -a_{n-1}s^{(n-1)}Y(s) + a_n y^{(n-2)}(0) + ... + b_m s^m U(s) - b_m s^{m-1}u^{(m-1)}(0) + ...$$

$$Y(s) = \frac{1}{\underbrace{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0}_{D(s)}}[\underbrace{(b_m s^m + ... + b_0)}_{N(s)} U(s) + \underbrace{N_0(s)}_{\textit{polinomio in } s \textit{ funzione delle condizioni iniziali}}]$$

   he si ottiene da

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\frac{N(S)}{D(s)}}_{P(s)} U(S) + \frac{N_0(S)}{D(S)} \\ &= Y_u(s) + Y_0(s) \end{aligned} \tag{2.12}$$

   dove $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ e' la funzione di trasferimento , $Y_u(s) = P(s)U(s)$ e' la risposta forzata e $Y_0(s)$ e' la risposta libera che dipende solamente dalle condizioni iniziali. In particolare la funzione di trasferimento e la risposta libera possono essere scritte come:

$$P(s) = \frac{b_m s^m + ... + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0} \tag{2.13}$$

$$Y_0(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)} = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + ... + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_0} \tag{2.14}$$

dove i coefficienti $\{c_i\}_{i=0}^{n-1}$ sono funzione dei sia dei coefficienti $\{a_i, b_i\}$ sia delle condizioni iniziali $\{y^{(j)}(0), u^{(j)}(0)\}$. Si noti che la risposta libera e' una funzione razionale strettamente propria, cioe' il grado del polinomio nel numeratore e' piu' piccolo di quello del denominatore.

Risulata inoltre chiaro che per passare dalla rappresentazione tramite equazioni differenziali a quella tramite funzione di trasferimento basta sostistuire $\frac{d}{dt}$ con s e viceversa.

3. **Risposta impulsiva** Applicando l'antitraformata di all'equazione 2.12 e ritardando la propri

$$\begin{aligned} y(t) &= y_u(t) + y_0(t) \\ &= h(t) * u(t) + y_0(t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

dove

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[P(s)] \tag{2.16}$$

e' detta risposta impulsiva, poiche' per condizioni iniziali nulle ed ingresso impulsivo $u(t) = \delta(t)$, l'uscita risulta $y(t) = y_u(t) = h(t)$. Si noti che la funzione di trasferiemento puo' essere scritta come somma di funzioni razionali dei poli:

$$P(s) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{1}{(s - p_i)^{l_i}} \tag{2.17}$$

dove p_i sono gli zeri di $D(s)$, α_i i residui reali o complessi coniugati, e l_i corrisponde alla multiplicita' dei poli p_i. Applicando l'antitrasformata di Laplace otteniamo che

$$h(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^{l_i - 1} e^{p_i t}$$

Da questa rappresentazione si osserva che la risposta inpusiva e' una combinazione dei modi del sistema, cieo' di funzioni esponenziali e sinusiodali. Si noti che sebbene sebbene p_i, α_i possono essere numeri complessi, questi compaiono sempre con la somma dei loro complessi caniugati e quindi $h(t)$ risulta essere una funzione puramente reale.

4. **Spazio di stato**
La rappresentazione in spazio di stato di un sistema dinamico lineare multi-ingresso e multi-uscita (MIMO) e' data da:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ e $u \in \mathbb{R}^p$ e matrici A, B, C, D di dimensione opportuna. Applichiamo ora la trasformata di Laplace sull'intero sistema. Definiamo $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ e $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ ottenendo quindi:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

lavoriamo sulla prima equazione del sistema:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + x(0) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x(0)$$

e sostituiamo il risultato ottenuto nella seconda equazione del sistema

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0)$$

Ricordando che $Y(s) = P(s)U(s) + Y_0$ si deduce che:

$$C(sI - A)^{-1}x(0) = \frac{N_0(s)}{D(s)} \tag{2.18}$$

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{N(s)}{D(s)} \tag{2.19}$$

possiamo, perciò, passare dalla rappresentazione in spazio di stato alla rappresentazione tramite funzione di trasferimento.

Mentre la rappresentazione di un sistema tramite funzione di trasferimento e' unica, esistono invece infinite rappresentazioni in spazio di stato, cieo' esistono infinite matrici (A, B, C, D) che descrivono lo stesso sistema. Riportiamo di segiuto le piu' comuni ottenute partendo dalla funzione di traferimento $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n s^n + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}$:

- forma canonica di controllo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \ldots & & a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

- forma canonica di osservabilità:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b_n \end{bmatrix}$$

2.1.3 Perchè é importante la funzione di trasferimento:

1. **Risposta libera:** Consideriamo nuovamente l'uscita nello spazio delle trasformate di Laplace $Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) + \frac{N_0(s)}{D(s)}$, dove $D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 = \prod(s - p_j)$ dove p_j sono le radici di $D(s)$, ovvero i poli della funzione di trasferimento $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$. Poiche' si siamo ristretti alle funzioni causali, il grado del polinomio del numeratore $N_0(s)$ e' sempre strettamente minore di n e quindi del denominatore $D(s)$. Cio' significa che possiamo riscrivere la risposta libera libera $\Rightarrow Y_0(s) = \frac{N_0(s)}{D(s)} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{1}{(s-p_j)^{l_j}}$. Se ora applichiamo l'antitrasformata di Laplace a $Y_0(s)$ otteniamo:

$$y_0(t) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j t^{l_j - 1} e^{p_j t}$$

con $p_j = a_j + jb_j$. Possiamo quindi affermare che se il sistema e' strettamente stabile, cioe' se $Re[p_j] = a_j < 0, \forall j$ allora $\Rightarrow y_0(t) \to 0$ per ogni condizione iniziale. In altre parole, in un sistema strettamente stabile, dopo un certo transitorio iniziale l'uscita del sistema dipendera' solamente dall'ingresso, cioe' $y(t) = y_u(t)$.

2. **Ingresso sinusoidale** Consideriamo ora la risposta forzata per un ingresso sinusoidale $u(t) = A \sin \omega t$ in un sistema strettamente stabile ($Re[p_j] < 0$).

   Sotto queste ipotesi abbiamo $y_t(t) = y_u(t) + y_0(t)$ con $y_0(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, quindi $\Rightarrow y_t(t) \xrightarrow{t\to\infty} y_u(t)$
   dove $\Rightarrow y_u(t) = B \sin(\omega t + \phi)$ con modulo $B = A\|P(j\omega)\|$ e fase $\phi = \angle P(j\omega)$. Quindi e' possibile calcolare facilmente il guadagno e la sfasamento di un ingresso sinusoidale andando a valutare la funzione di trasferimento sull'asse immaginario, cioe' sostituendo $s = j\omega$.

3. **Ingressi particolari: impulso, gradino e rampa**
   Consideriamo ancora una volta la risposta forzata $Y_u(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s)$ per un sistema strettamente stabile, e consideriamo, ad esempio, un ingresso a gradino $u(t) = 1(t)$ la lui trasformata di Laplace e' data da $\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = 1/s$. Innanzi tutto notiamo che

$$Y_u(s) = \frac{N(s)}{sD(s)} = \frac{\alpha_0}{s} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{(s - p_j)^{l_j}} \tag{2.20}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che il grado del polinomio del numeratore $N(s)$ e' strettamente minore del denominatore $sD(s)$. Possimo quindi ricostruire la risposta temporale della risposta forzata utilizzando l'antitrasformata di Laplace:

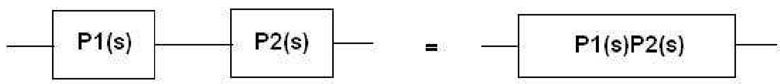
$$\mathcal{L}^{-1}[Y_u(s)] = y_u(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j t^{l_j - 1} e^{p_j t}$$

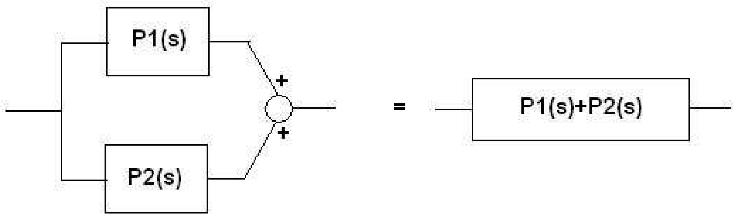
Poiche' per ipotesi $Re[p_j] < 0$ allora $\Rightarrow y_u(t) \to \alpha_0$. Inoltre osservando l'Equazione 2.20, si deduce che

$$\begin{aligned} y_u(\infty) &= \alpha_0 = \left.\frac{sN(s)}{sD(s)}\right|_{s=0} = \left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=0} \\ &= P(0). \end{aligned}$$

che corrisponde al teorema del valore finale. Quindi il valore a regime di un sistema strettamente stabile corrisponde al valore della funzione di trasferimento calcolato nell'origine.

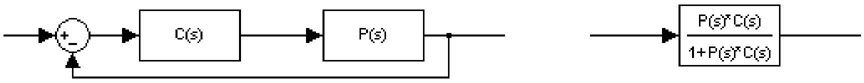
4. **Composizione di sistemi:** E' facile ottere la funzione di trasferiemento globale di sistemi interconnessi fra di loro, come ad esempio serie, paralleli e retroazioni.





2.1.4 Approssimazione di sistemi strettamente stabili:

Dato il sistema seguente ecquivalente all´ unico blocco



vogliamo progettare il controllore C(s) in modo tale che $P_c(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)}$ sia approssimabile a $P_2(s)$ che rappresenta la funzione di trasferimento di un sistema piu' semplice. Se $P_c(s)$ è strettamente stabile (poli $Re[p_j] < 0$) allora $y_0(t) \to 0$ e quindi a regime avremo $y_u(t) = h(t) * u(t)$.

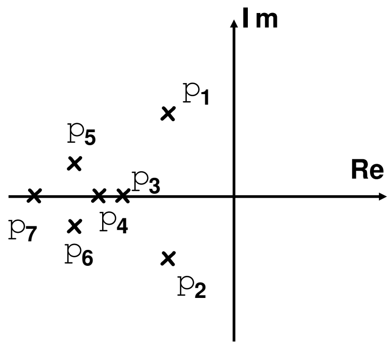


Figura 2.1. Poli del sistema strettamente stabile in catena chiusa ordinati in base alla parte reale.

Con u(t) e' un gradino unitario, tipico segnale di riferimento che se cerca di inseguire, abbiamo:

$$y_u(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j t^{l_j-1} e^{p_j t} = \alpha_0 + \alpha_1 e^{p_1 t} + \alpha_2 e^{p_2 t} + \sum_{j=3}^{n} \alpha_j t^{l_j-1} e^{p_j t}$$

dove i poli in catena chiusa sono stati ordinati in modo tale che $Re[p_j] \leq Re[p_{j+1}]$. L'idea di approssimare un sistema strettamente stabile tramite un sistema di secondo ordine inferiore si basa sul fatto che i termini il cui polo p_j ha parte reale negativa piu' grande in modulo rispetto agli altri decade a zero piu' velocemente e quindi dopo un breve transitorio il loro contributo e' trascurabile anche se i coefficienti α_j corrispondenti sono elevati. Noi utilizzeremo un'apporsimazione che tiene conto solamente dei due poli con parte reale meno negativa, cioe' quelli piu' lenti. In realta' potremmo utilizzare anche approssimazioni con piu' poli, ma queste sono piu' difficili da analizzare, mentre in un sistema del secondo ordine e' possibile ricavare in maniera analitica alcuni parametri della risposta forzata che sono strettamente legati alle prestazioni del sistema. Consideriamo quindi $y_u(t) \simeq \alpha_0 + \sum_{j=1}^{2} \tilde{\alpha}_j e^{\tilde{p_j} t}$ che corrisponde alla risposta a gradino di un sistema del secondo ordine la cui funzione di trasferimento puo' essere scritta come:

$$P_{\text{II}}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove ω_n e' la frequenza di risonanaza naturale e ξ e' il coefficiente di smorzamento. Una tipica risposta a gradino di tale sistema e' riportata nella seguente figura.