

10.1 Progettazione con retroazione di stato

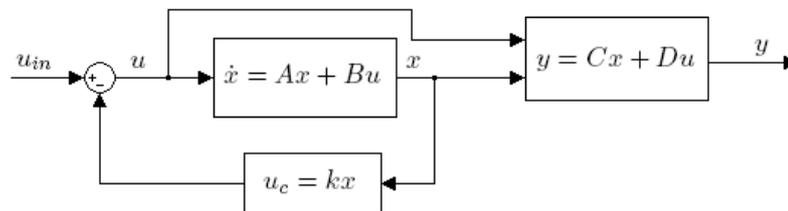


Figura 10.1. Schema 1

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u_{in} - u_c) = Ax + Bu_{in} + BKx = (A - BK)x - Bu_{in} \\ y = Cx + D(u_{in} - u_c) = Cx + Du_{in} - DKx = (C - DK)x + Du_{in} \end{cases}$$

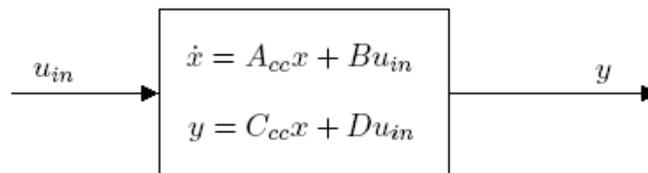


Figura 10.2. Schema equivalente a quello di figura 10.1

dove:

$$A_{cc} = A - BK$$

$$C_{cc} = C - DK$$

La funzione di trasferimento in catena chiusa è:

$$Y(s) = P_{cc}(s)U_{in}(s) = (C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}B + D$$

Visto che D non influenza la stabilità per semplicità si considera D=0. Si ottiene così:

$$P_{cc}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B = \frac{N_{cc}(s)}{D_{cc}(s)}$$

con: $D_{cc}(s) = \det(sI - (A - BK)) \leftarrow$ poli $P_{cc}(s) = \lambda(A - BK)$

Se (A,B) è raggiungibile $\Rightarrow \exists K$ tale che $(A - BK)$ abbia autovalori λ_i desiderati (si possono piazzare gli autovalori dove si vuole).

\Downarrow

Problema: dove piazzare i poli in catena chiusa? Utilizzo l'approssimazione di un sistema stabile con quello di un sistema del secondo ordine:

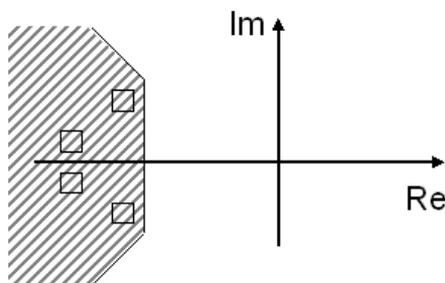


Figura 10.3. Poli in catena chiusa

10.1.1 Raggiungibilità non è proprietà robusta

ex:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = [0]$$

È controllabile?

$$\det([B|AB]) = \det \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\epsilon \neq 0$$

Quindi è controllabile e si può trovare K .

Si deve trovare $K = [k_1 \ k_2]$ che verifichi l'equazione:

$$\det(sI - (A - BK)) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - [k_1 \ k_2]\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \epsilon \\ -k_1 & 1 - k_2 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s & -\epsilon \\ k_1 & s - 1 + k_2 \end{bmatrix}\right) = s(s - 1 + k_2 + \epsilon k_1) = s^2 + (k_2 - 1)s + \epsilon k_1 \end{aligned}$$

si vuole che sia:

$$\begin{cases} 2\xi\omega_n = k_2 - 1 \\ \omega_n^2 = \epsilon k_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 = 1 + 2\xi\omega_n \\ k_1 = \frac{\omega_n^2}{\epsilon} \end{cases}$$

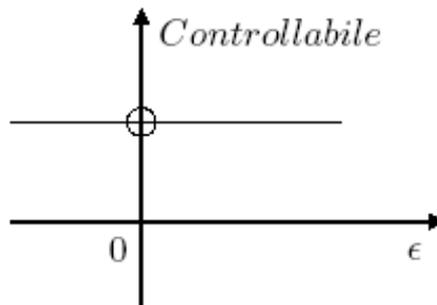


Figura 10.4. Grafico di controllabilità

$$\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow k_1 \rightarrow \infty$$

$$\omega_n \rightarrow \infty \Rightarrow k_1, k_2 \rightarrow \infty$$

quindi il sistema è poco controllabile.

10.1.2 Ruolo degli zeri

Si suppone che il sistema abbia funzione di trasferimento $P(s) = \frac{s-z_0}{(s+4)(s+3)}$. Questo sistema è già stabile avendo tutti i poli a parte reale negativa.

Si vuole vedere come gli zeri influiscano sullo spostamento dei poli in catena chiusa¹.

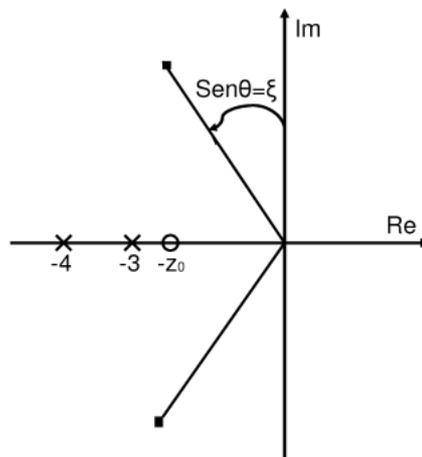


Figura 10.5.

Si scrive quindi il sistema in forma canonica di osservabilità:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -12 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -z_0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0] \quad \mathbf{D} = [0]$$

¹si noti che nella Figura 10.5 lo zero è z_0 e non $-z_0$.

Si va ora a considerare il sistema in retroazione di stato con $\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2]$ e si vuole porre $\det(sI - (A - BK)) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$

$$k_1 = \frac{z_0(14\xi\omega_n - 37 - \omega_n^2) + 12(2\xi\omega_n - z)}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)} \simeq \frac{-z_0\omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)} \text{ con } \omega_n \gg 1$$

$$k_2 = \frac{z_0(z - 2\xi\omega_n) + 12 - \omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)} \simeq \frac{-z_0\omega_n^2}{(z_0 + 3)(z_0 + 4)} \text{ con } \omega_n \gg 1$$

Si può notare che quando z_0 tende a uno dei due poli -3 e -4 , k_1 e k_2 tendono a ∞ :

$$z_0 \rightarrow \begin{matrix} -3 \\ -4 \end{matrix} \Rightarrow k_1, k_2 \rightarrow \infty$$

10.1.3 Indicazioni per la progettazione

1. Spostare i poli in catena chiusa non troppo negativi cioè cercare di piazzarli appena dentro la regione che soddisfa le specifiche.
2. Spostare di poco i poli che sono vicini agli zeri.
3. Non spostare poli già molto negativi.

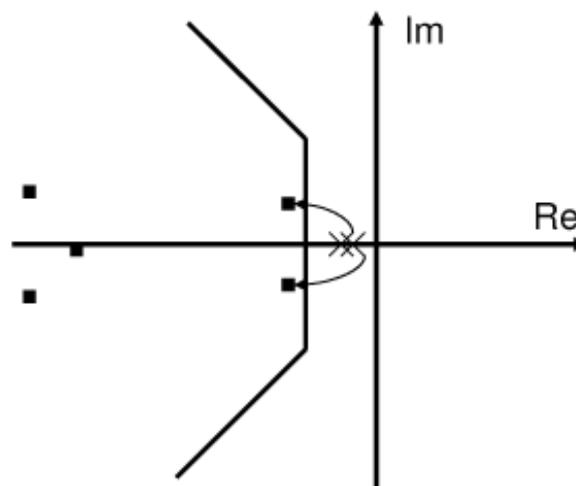


Figura 10.6.

10.2 Comportamento a regime

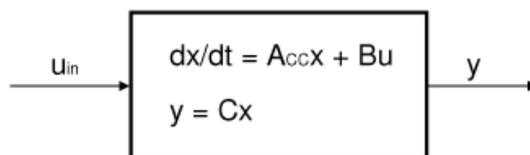


Figura 10.7.

Dato il sistema stabile in catena chiusa si vuole riuscire ad inseguire perfettamente un segnale di ingresso costante:

$$u_{in}(t) = cost \Rightarrow y(t) \rightarrow y_{DC} = cost$$

$$y_{DC} = P_{CC}(0)u_{in} = -C(A - BK)^{-1}Bu_{in}$$

Per sistemi SISO $-C(A - BK)^{-1}B$ si riduce ad uno scalare c per cui $y = cu_{in}$ e quindi per poter inseguire il riferimento uso un blocco \bar{N} , detto **inseguimento di feedforward**, che fa sì che sia $c = 1$.

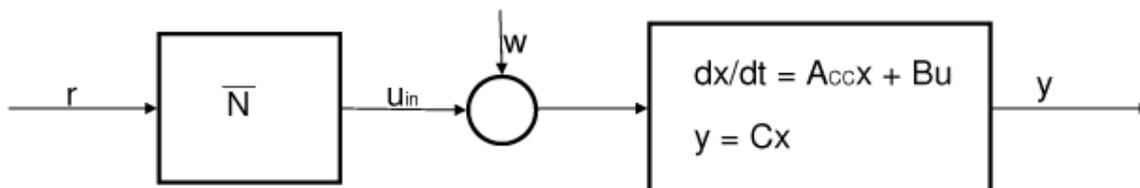


Figura 10.8.

$$\bar{N} = \frac{1}{-C(A - BK)^{-1}B} \quad \text{INSEGUIMENTO IN FEEDFORWARD}$$

Cosa succede se i parametri differiscono, se pur di poco, da quelli nominali?

$$A = A_n + \Delta$$

$$-C(A - BK)^{-1}B \neq -C_n(A_n - B_nK)^{-1}B_n$$

Quindi quando si va a vedere l'uscita a regime si ha un errore perché si avrà $c = \frac{-C(A-BK)^{-1}B}{-C_n(A_n-B_nK)^{-1}B_n} \neq 1$ anche se pur di poco.

↓

Il controllo feedforward non è robusto rispetto alle incertezze sui parametri.

Inoltre nel caso in cui si abbia un disturbo $w = cost$ lo si ritrova in uscita e con questa configurazione non si può eliminarlo .

10.3 Controllo integrale per segnali di riferimento

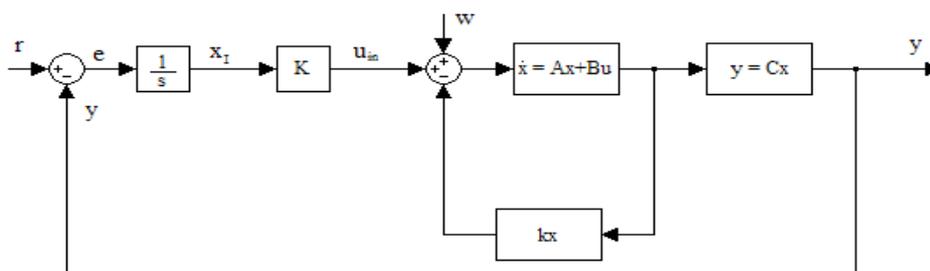


Figura 10.9.

$$x_I = \int_0^T e(t)dt \Rightarrow \dot{x}_I = e = e - y = r - cx$$

Lo schema 10.9 é stato ottenuto ponendo $D = 0$ e indicando con w il disturbo di ingresso. Ora non si considera la retroazione dello stato e si ottiene così lo schema 10.10 ed il suo schema equivalente 10.11.

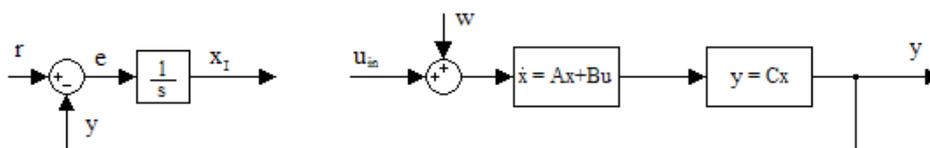


Figura 10.10.

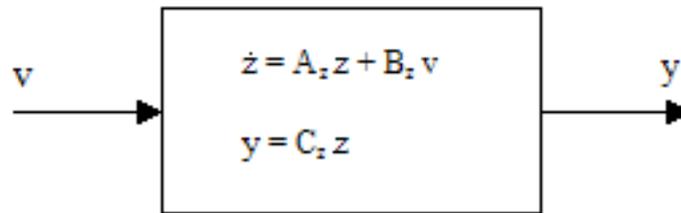


Figura 10.11.

v , z e le matrici A_z , B_z , C_z sono definite nel seguente modo:

$$\bullet v = \begin{bmatrix} r \\ w \\ u_{in} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\bullet z = \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

$$\bullet A_z = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0_{n \times 1} & A \end{bmatrix}$$

$$\bullet B_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0_{n \times 1} & B & B \end{bmatrix}$$

$$\bullet C_z = [0 \quad C]$$

dove $0_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Da cui si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0_{n \times 1} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{n \times 1} \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} u_{in} \quad (10.1)$$

$$y = [0 \quad C] \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

$(A_z, B_{U_{in}})$ è raggiungibile?

$$\text{rango}[sI - A_z | B_{u_{in}}] = \text{rango} \begin{bmatrix} s & C & 0 \\ 0_{n \times 1} & sI - A & B \end{bmatrix} = n + 1$$

$$\text{Per } s \neq 0 \Rightarrow \text{rango}[sI - AB] = n \quad (10.3)$$

$$\text{Per } s = 0 \Rightarrow \text{rango} \begin{bmatrix} C & 0 \\ sI - A & B \end{bmatrix} = n + 1 \quad (10.4)$$

La (10.3) è sempre vera, infatti (A,B) è raggiungibile; la (10.4) risulta vera se s non è zero di A .

Si può concludere quindi che $(A_z, B_{U_{in}})$ è raggiungibile $\Leftrightarrow (A, B)$ raggiungibile e $s = 0$ non è zero di trasferimento di (A, B, C) .

Da Analisi dei Sistemi è noto che se $(A_z, B_{u_{in}})$ è raggiungibile allora esiste un $K_z \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ tale che la retroazione statica dello stato $u_{in} = K_z = [k_I \quad K] \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} = k_I x_I + Kx$ rende il sistema in catena chiusa $(A_z - B_{u_{in}} K_z)$ strettamente stabile.