

Lezione 11 — 21 Febbraio

Docente: Luca Schenato

Stesori: D. Donà; M. Munaro; B. M. Torri

11.1 Regolazione con controllo integrale

Viene aggiunto al sistema¹:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

un nuovo stato:

$$\dot{x}_I = e = r - y = r - Cx$$

ottenendo ancora un sistema dinamico.

Riscrivendolo in forma compatta (usando un nuovo stato z) si trova:

$$z = \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

e supposto che l'ingresso sia composto da un ingresso di controllo e un disturbo $u = u_{in} + w$ si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z u_z \\ y = C_z z \end{cases} \quad (11.1)$$

dove $u_z = \begin{bmatrix} u_{in} \\ w \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ e $y_z = y$

Quindi esplicitando l'Equazione ?? si ricava:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -C \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{A_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ B & B & 0 \end{bmatrix}}_{B_z} \begin{bmatrix} u_{in} \\ w \\ r \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}}_{C_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

¹dove per semplicità si è posto $D=0$.

In Fig. ?? viene rappresentato lo schema a blocchi del sistema con retroazione dello stato $u_{in} = -K_z z$ (Fig 1a) e lo schema a blocchi del sistema finale² (Fig 1b).

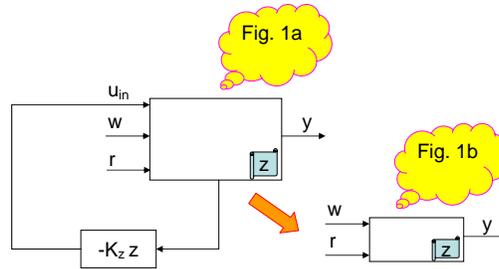


Figura 11.1. Sistema in catena chiusa

Se si sostituisce $u_{in} = -K_z z$ in (??) si ottiene³:

$$\dot{z} = (A_z - B_{in}K_z) z = [B_{in}B_r] \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Quindi, ipotizzando che $(A_z - B_{in}K_z)$ sia strettamente stabile, si osserva il comportamento del sistema a ingressi costanti $r(t) = r_{DC}$ e $w(t) = w_{DC}$ e si rileva che il sistema $z \rightarrow z_{cost}$ a $t \rightarrow \infty$.

Di conseguenza $\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} \rightarrow 0$ che implica $\dot{x}_I \rightarrow 0$. Ricordando che $\dot{x}_I = r - Cx = r - y$ si trova che $y \rightarrow r$ ottenendo, quindi, un inseguimento perfetto a regime $y \rightarrow r \rightarrow r_{DC}$. Se anche A_z e B_{in} non sono note a priori la $(A_z - B_{in}K_z)$ rimane stabile per piccole incertezze⁴.

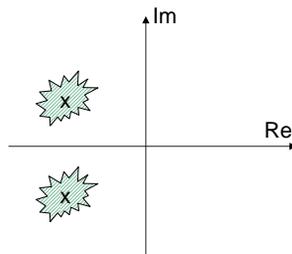


Figura 11.2. Incertezza poli del sistema in catena chiusa

²E' ancora un sistema dinamico in catena chiusa.

³Ricordando che B_z (??) è uguale a $[B_{in}B_r]$.

⁴Per la proprietà di continuità degli autovalori di A rispetto agli elementi di A .

Affinché $(A_z - B_{in}K_z)$ sia strettamente stabile si vuole che (A_z, B_{in}) sia raggiungibile cioè che $\text{rango}[sI - A_z B_{in}] = n + 1$.

Ora $[sI - A_z B_{in}]$ è:

$$\begin{bmatrix} s & -C & 0 \\ 0 & sI - A & B \end{bmatrix}$$

Se $s \neq 0 \Rightarrow \text{rango}[sI - A_z | B_{in}] = n + 1$ perché $\text{rango}[sI - A | B] = n$ (se (A, B) raggiungibile) e la prima riga è linearmente indipendente dalle altre.

Se $s = 0$ posso riscrivere la matrice moltiplicata per -1 visto che non cambia il rango:

$$\begin{bmatrix} 0 & C & 0 \\ 0 & A & -B \end{bmatrix}$$

Il rango di questa matrice è $n + 1 \Leftrightarrow s = 0$ non è uno zero di trasferimento di (A, B, C) . Quindi sono 2 le ipotesi per garantire che $(A_z - B_{in}K_z)$ sia strettamente stabile:

- (A, B) raggiungibile
- $s = 0$ non è uno zero di trasferimento di (A, B, C) .

Per quanto riguarda la retroazione si sceglie:

$$u_{in} = -K_z z = - \begin{bmatrix} K_I & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} = -K_I x_I - Kx$$

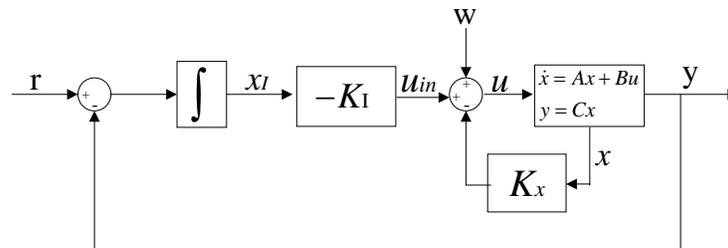


Figura 11.3. Controllo integrale

In Figura 11.3 si vede come l'errore $r - y$, venga integrato dando x_I , che poi viene moltiplicato per $-K_I$ e a cui viene sommato il disturbo e sottratto Kx prima di entrare nel sistema \Rightarrow rispetto al caso in cui non c'era l'integratore è stato inserito il blocco $-K_I$.

Questo modello risulta più lento rispetto al feed-forward perché prima controlla l'errore e poi tenta di eliminarlo.

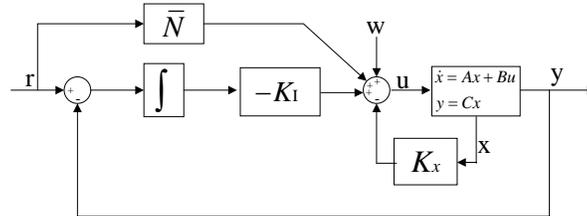


Figura 11.4. Controllo integrale modificato

Però posso prendere il riferimento e aggiungerlo nello schema come in Figura 11.4.

Con questa modifica il modello è veloce quanto il feed-forward e compensa eventuali disturbi
 ⇒ ha i vantaggi di entrambi.

Riscrivendo il blocchetto \bar{N} indietro:

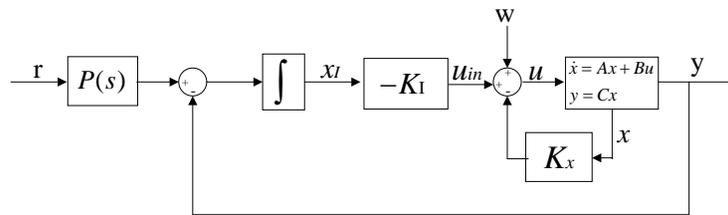


Figura 11.5. Principio del modello interno

$$\begin{aligned}
 u &= w - Kx + (r - y) \left(-\frac{K_I}{s} \right) + \bar{N}r \\
 &= w - kx + [P(s)r - y] \left(-\frac{K_I}{s} \right) \\
 \Rightarrow (r - y) \left(-\frac{K_I}{s} \right) + \bar{N}r &= -\frac{K_I r P(s)}{s} + \frac{K_I y}{s} \\
 -\frac{r K_I}{s} + \frac{y K_I}{s} + \bar{N}r &= -\frac{K_I r P(s)}{s} + \frac{K_I y}{s} \\
 \Rightarrow P(s) &= -\frac{s}{K_I} \left(-\frac{K_I}{s} + \bar{N} \right) = 1 - \frac{\bar{N}s}{K_I} = 1 - \tau s
 \end{aligned}$$

⇒ $P(s)$ corrisponde ad uno zero ⇒ la FDT avrà poli in catena chiusa come quella di prima
 più avrà uno zero reale negativo che tende a cancellare i poli ⇒ rende il sistema più veloce
 senza intaccare la prestazione a regime perché se $s = 0 : P(s) = 1$.

11.2 Linee guida per la progettazione con retroazione di stato

1. Scegliere se utilizzare feedforward, retroazione integrale o entrambi.
2. Scegliere posizione degli autovalori di $A_{cc} = A - BK$ (con ipotesi che (A, B) raggiungibile)
3. Utilizzare la regione di prestazione di un sistema del 2° ordine.
4. Scegliere $\lambda_{cc}(A_{cc})$, autovalori in catena chiusa, non troppo negativi (per saturazione d'ingresso e incertezze che si hanno sul sistema).
5. Non spostare autovalori già sufficientemente negativi (può creare problemi).
6. Portare autovalori in catena chiusa vicino agli zeri negativi (aiuta a cancellare i poli) anche se vanno un po' fuori dalla regione di prestazione.
7. Cercare di mantenere λ_{cc} relativamente distanziati, perché, se sono vicini, si hanno modi del tipo $t \exp(-t)$ che tendono a crescere.
8. Parametrizzare la posizione dei λ_{cc} (per esempio su una circonferenza di raggio ω_n equidistanziandoli in quanto a posizione angolare).
9. Utilizzare simulazioni per scegliere la configurazione dei λ_{cc} ottimale.