Lezione 12 — 22 Febbraio

Docente: Luca Schenato *Stesori: Giulio "Zuita" Bottegal, Enrico "Bonobo" Lovisari, Riccardo "Kako" Fabbris*

12.1 Principio del modello interno (Generalizzazione regolazione integrale)

Il principio del modello interno si basa sulla conoscenza delle caratteristiche dei segnali di riferimento r e di disturbo w.
Casi molto frequenti sono:

- r e w segnali costanti (ma non noti)
- r e w sinusoidi di frequenza ω_0

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y = Cx \end{cases}$$

con:

- $x \in \mathbb{R}^n$
- $u \in \mathbb{R}^p$
- $w \in \mathbb{R}^\ell$
- $r \in \mathbb{R}^d$
- $y \in \mathbb{R}^d$

Vogliamo che $y(t) \to r(t)$ a regime

$$r^{(m)} + \alpha_{m-1} r^{(m-1)} + ... + \alpha_0 r = 0 \tag{12.1}$$

$$w^{(m)} + \alpha_{m-1} w^{(m-1)} + ... + \alpha_0 w = 0 \tag{12.2}$$

cioè che abbiano gli stessi coefficienti.

Definiamo $e = r - y = r - Cx$ errore di inseguimento.

Dalla precedente si trova che $e^{(m)} = r^{(m)} - Cx^{(m)}$ $\forall m$ e quindi

$$r^{(m)} = e^{(m)} + Cx^{(m)} \tag{12.3}$$

Dalle 12.1 e 12.3 si trova che:

$$e^{(m)} + Cx^{(m)} + \alpha_{m-1}(e^{(m-1)} + Cx^{(m-1)}) + ... + \alpha_0(e + Cx) = 0$$

e quindi che:

$$e^{(m)}\alpha_{m-1}e^{(m-1)} + ... + \alpha_0 + C(\underbrace{x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + ... + \alpha_0 x}_{\xi\in\mathbb{R}^n}) = 0$$

Il nuovo stato risulta quindi essere:

$$\xi \triangleq x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + ... + \alpha_0 x$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= x^{(m+1)} + \alpha_{m-1}x^{(m)} + ... + \alpha_0 x^{(1)} \\
&= (Ax^{(m)} + Bu^{(m)} + Gw^{(m)}) + ... + \alpha_0(Ax + Bu + Gw) \\
&= A(x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + ... + \alpha_0 x) + B(\underbrace{u^{(m)} + \alpha_{m-1}u^{(m-1)} + ... + \alpha_0 u}_{u_\xi\in\mathbb{R}^p}) + \\
&\quad G(w^{(m)} + \alpha_{m-1}w^{(m-1)} + ... + \alpha_0 w) \\
&= A\xi + Bu_\xi
\end{aligned}$$

Dove, nell'ultima equazione, si è usata la 12.2 facendo così non comparire più il disturbo.

Il nuovo stato è quindi $z \triangleq \left[\begin{array}{c} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \hline \xi \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{(n+m)}$

Da cui:

$$\dot{z} = \left[\begin{array}{c} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(m)} \\ \hline \dot{\xi} \end{array}\right] = \overbrace{\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} & -C \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A \end{array}\right]}^{A_z} \left[\begin{array}{c} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \hline \xi \end{array}\right] + \overbrace{\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \hline \mathrm{B} \end{array}\right]}^{B_z} u_\xi$$

Quindi $\dot{z} = A_z z + B_z u_\xi$

Se (A_z, B_z) è raggiungibile, allora $\exists K_z \in \mathbb{R}^{(m+n)\times p} : (A_z - B_z K_z)$ gli autovalori siano in posizione arbitraria e quindi anche asintoticamente stabile. Nel caso sia strettamente stabile allora $z(t) \to 0$ per ogni condizione iniziale di r e w che soddisfino 12.1 e 12.2(e quindi $e(t) \to 0$, ovvero $y(t) \to r(t)$).

Applicando il criterio PBH per la raggiungibilità alle matrici (A_z, B_z) si trova:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c|c} s & \text{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & \text{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \text{-1} & 0 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & s+\alpha_{m-1} & C & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & sI - A & B \end{array}\right]$$

Risulta che condizioni necessarie e sufficienti affinché (A_z, B_z) sia raggiungibile sono che:

- (A, B) sia raggiungibile
- gli zeri di $(s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + ... + \alpha_0)$ non siano zeri di trasferimento di (A, B, C)

Si può scrivere che

$$u_\xi = -\big[\underbrace{k_0 \ \cdots \ k_{m-1}}_{\in \Re^m} \ \underbrace{k_\xi}_{\in \Re^n}\big] \left[\begin{array}{c} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \xi \end{array}\right]$$

E dalla definizione di u_ξ

$$u^{(m)} + \alpha_{m-1}u^{(m-1)} + ... + \alpha_0 u = -k_0 e - ... - k_{m-1}e^{(m-1)} - k_\xi(x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + ... + \alpha_0 x)$$

Da cui

$$(u^{(m)} + k_\xi x^{(m)}) + \alpha_{m-1}(u^{(m-1)} + k_\xi x^{(m-1)}) + ... + \alpha_0 \underbrace{(u + k_\xi x)}_{\widetilde{u}} = -k_0 e - ... - k_{m-1}e^{(m-1)}$$

E quindi

$$\widetilde{u}^{(m)} + \alpha_{m-1}\widetilde{u}^{(m-1)} + ... + \alpha_0 \widetilde{u} = -k_0 e - ... - k_{m-1}e^{(m-1)}$$

Trasformando alla Laplace

$$s^m \widetilde{U}(s) + \alpha_{m-1}s^{m-1}\widetilde{U}(s) + ... + \alpha_0 \widetilde{U}(s) = -k_0 E(s) - ... - k_{m-1}s^{m-1}E(s)$$

Da cui

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(s) &= \underbrace{-\frac{k_{m-1}s^{m-1} + ... + k_0}{s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + ... + \alpha_0}}_{P_e(s)} E(s) \\ &= P_e(s)E(s) \end{aligned}$$

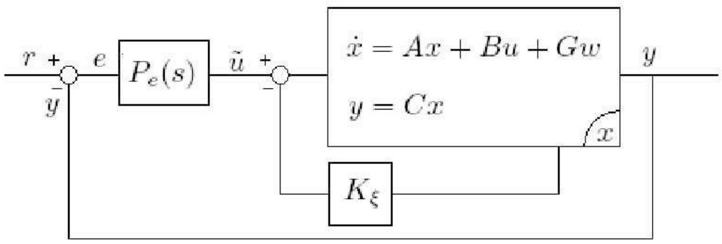

Figura 12.1. *Schema del modello interno*

$$Y(s) = P_{ry}(s)R(s)$$

Se $\ddot{r}(t) + r(t) = 0$ allora si hanno segnali del tipo $r(t) = A\sin(t + \phi)$.

L'uscita a regime risulta quindi $y(t) = A|P_{ry}(j\omega_0)|\sin(t + \phi + \angle P_{ry}(j\omega_0))$. Se invece si hanno disturbi del tipo $w(t) = A\sin(t + \phi)$ e $r(t) = 0$ l'uscita a regime $y(t) = 0$. Quindi la funzione di trasferimento $Y(s) = P_{wy}(s)W(s)$ deve avere uno zero in $\omega_0 = 1$, cioe' $P_{wy}(j\omega_0) = 0$.

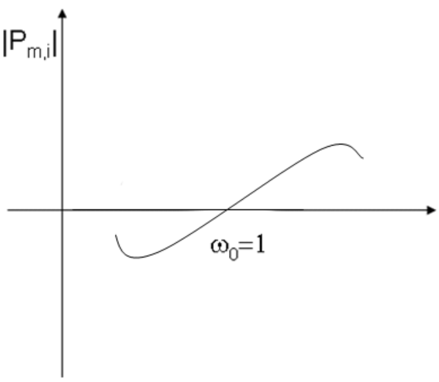

Figura 12.2. *Modulo della funzione di trasferimento $P_{ry}(j\omega)$.*

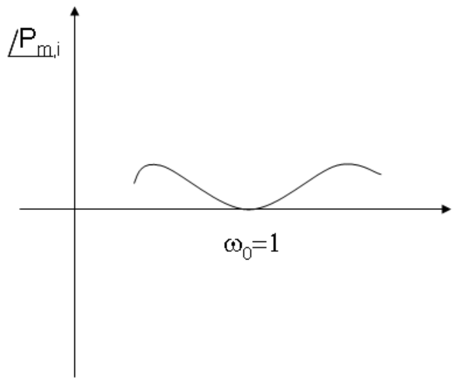

Figura 12.3. *Fase della funzione di trasferimento* $P_{ry}(j\omega)$.

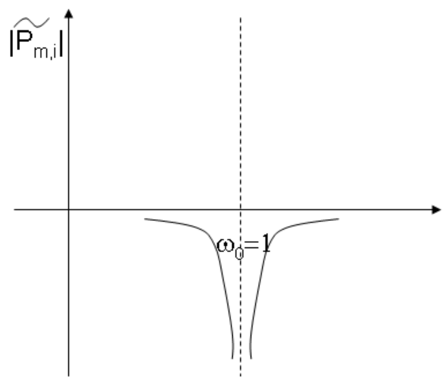

Figura 12.4. *Modulo della funzione di trasferimento* $P_{wy}(j\omega)$

12.2 Stimatori e regolatori

Non sempre è possibile (o conveniente) utilizzare la retroazione di stato $u = -Kx$, perchè:

1. non si dispone di tutto lo stato ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$);
2. anche se $\mathbf{x}$ è disponibile, il segnale è molto rumoroso (ad es. $u = K(\mathbf{x} + \mathbf{v})$, con $\mathbf{v}$ rumore additivo), quindi la retrozione risulta poco conveniente se il disturbo è elevato ($||\mathbf{v}|| \sim ||\mathbf{x}||$).

La soluzione che si utilizza in questi casi è quella di stimare lo stato $\mathbf{x}$ e applicare la retroazione sulla stima, ottenendo

$$u = -K\hat{\mathbf{x}} \tag{12.4}$$

dove $\hat{x}$ rappresenta lo stato stimato. Se si riesce ad ottenere $\hat{\mathbf{x}} \simeq \mathbf{x}$ allora si hanno buone possibiltà che il sistema di controllo abbia buone prestazioni.
La costruzione dello stimatore si basa sull'ipotesi che del sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \\ y = C\mathbf{x} \end{cases}$$

si conoscano con una certa accuratezza le matrici A, B, C; in tal caso si procede facendo una copia del sistema reale sul controllore (ad esempio un computer adibito a questo scopo) secondo lo schema in fig. 12.5.

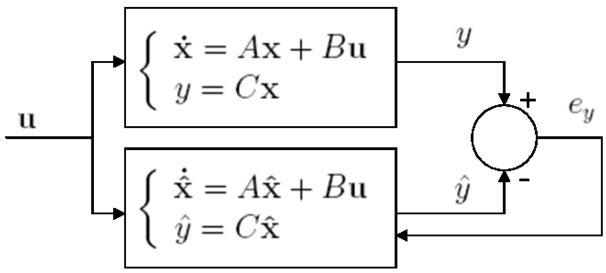

Figura 12.5. *Stima dello stato.*

Si definisce ora l'errore sulla stima di stato:

$$e_x \stackrel{\triangle}{=} x - \hat{x} \tag{12.5}$$

da cui si ricava

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu = A(x - \hat{x}) = Ae$$

$$\Rightarrow \dot{e}_x = Ae_x\,. \tag{12.6}$$

In particolare si ottiene che $e_x \to 0$ se e solo se A è "stabile" (ossia se i suoi autovalori hanno parte reale negativa); pertanto la costruzione degli stimatori di stato funziona solo per sistemi internamente stabili. In questo caso si ottiene che

$$e_x \sim e^{-\lambda t},$$

con λ autovalore di modulo maggiore. E' necessario osservare però che, limitandosi ad utilizzare una stima dello stato di tal genere, i modi che caratterizzano l'evoluzione dell'errore sono gli stessi che caratterizzano l'evoluzione libera del sistema, essendo in ambo i casi legati agli autovalori di A. Ma allora l'errore e_x non si può annullare con velocità maggiore di quella del sistema stesso.

Si supponga invece ora di considerare anche l'errore sull'uscita:

$$e_y = y - \hat{y}, \tag{12.7}$$

e si supponga di modificare la dinamica della stima dello stato ponendo:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}). \tag{12.8}$$

Costruita in tal modo la stima, la dinamica dell'errore sullo stato diviene:

$$\begin{aligned} \dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu - Ax - Bu - L(y - \hat{y}) && (12.9) \\ &= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) = (A - LC)e_x = A_s e_x && (12.10) \end{aligned}$$

Come suggerisce la teoria dell'Analisi dei Sistemi, se il sistema $(A,\, C)$ è osservabile (e per dualità è sufficiente controllare che $(A^T,\, C^T)$ sia raggiungibile), allora gli autovalori di A_s sono allocabili a piacere in funzione della matrice L opportuna scelta.

Scelta dunque L tale per cui A_s sia strettamente stabile, si ha la convergenza della stima dello stato $\hat{x}$ allo stato x, e questo avviene:

- $\forall\ x(0),\ \hat{x}(0)$;
- $\forall\ u(t)$: il principio dello stimatore è infatti una proprietà legata esclusivamente all'evoluzione libera, e per questo si parla di principio di separazione della stima dal controllo.

E' necessario però osservare che se il modello dello stimatore non è perfetto, non si ha perfetta cancellazione $Bu - Bu$ in 12.9, e dunque, pur limitato, si avvertirà in questo caso l'effetto dell'ingresso.