LabCont1: Laboratorio di Controlli 1 **II Trim. 2007**

Lezione 13 — 28 Febbraio

Docente: Luca Schenato *Stesori: Astarita Matia, Bovo Samuele e Zanella Marco*

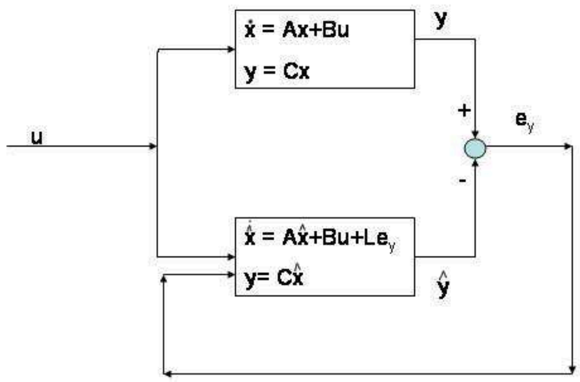
13.1 Stimatori e Regolatori

Modello fisico:

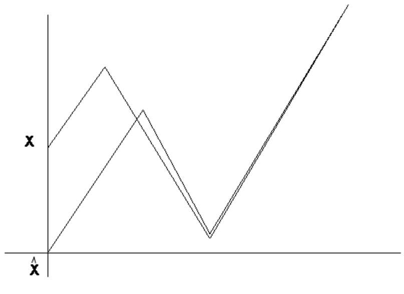
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Modello numerico (PC):

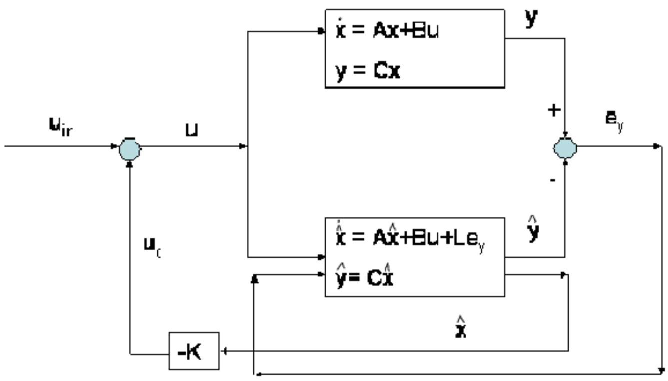
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \\ y = C\hat{x} \end{cases}$$



Errore di stato: $e_x = x - \hat{x}$
Errore di misura: $e_y = y - \hat{y} = C(x - \hat{x}) = Ce_x$
$\dot{e_x} = Ae_x \Rightarrow \begin{array}{c} e \rightarrow 0 \\ \hat{x} \rightarrow x \end{array} \Leftrightarrow$ A é stabile
$\dot{e_x} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu + Le_y) = (A - LC)e_x$
Se $(A - LC)$ strettamente stabile $\Rightarrow \hat{x} \rightarrow x$
La stima converge allo stato reale $\forall u, \forall A$
Se $x \rightarrow +\infty$, $\hat{x} \rightarrow x$: x puó anche divergere, ma $\hat{x}$ la segue comunque.

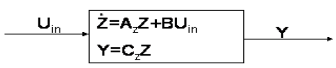


$\Rightarrow$ Si puó dunque usare la retroazione dallo stato stimato



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ u = u_{in} + u_c \\ u_c = -k\hat{x} \end{cases}$$

Le prime due equazioni modellizzano il sistema fisico, la terza e la quarta caratterizzano lo stimatore mentre le ultime due rappresentano la retroazione.



$$z = \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} \; z \in \mathbb{R}^{2n}$$

Sostituendo le equazioni che descrivono la retroazione in quelle del sistema fisico si ottiene:
$\dot{x} = Ax + Bu_{in} - Bk\hat{x} = Ax + Bu_{in} - Bk(x - e_x)$
$\dot{e_x} = Ax + Bu_{in} - Bk\hat{x} - (A\hat{x} + Bu_{in} - Bk\hat{x} + LCe_x) = (A - LC)e_x$

13.1.1 Sistema dinamico con retroazione di stato stimato

Le equazioni del sistema fisico, con la retroazione dallo stato stimato, risultano quindi:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e_x} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A-BK & BK \\ \hline 0 & A-LC \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline e_x \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B \\ \hline 0 \end{array}\right] u_{in}$$

$$y = \left[\begin{array}{c|c} C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline e_x \end{array}\right]$$

La stabilitá di questo sistema dipende dagli autovalori della matrice A_z:

$$\Re[\lambda(A_z)] < 0 \Leftrightarrow Stabile$$

Si nota inoltre che tale matrice é triangolare superiore, quindi i suoi autovalori dipendono esclusivamente dalle due sottomatrici:

$\lambda(A_z) = \lambda(A - BK) \bigcup \lambda(A - LC)$

Dove la prima sottomatrice $(A - BK)$ dipende dal controllo, la seconda $(A - LC)$ dalla stima. Ció é equivalente al principio di separazione tra controllo e stima.

$$\begin{cases} \text{(A,B)}, RAGGIUNGIBILE & \Rightarrow \\ \text{(A,C)}, OSSERVABILE & \Rightarrow \end{cases}$$ Esponenzialmente stabile con autovalori in catena chiusa arbitrari

Ció é molto importante, in quanto si riesce a stabilizare qualunque sistema.

13.1.2 Funzioni di trasferimento dei regolatori e robustezza

Per i sistemi SISO lo schema di retroazione e' mostrato in Figura 13.1. In tale schema la

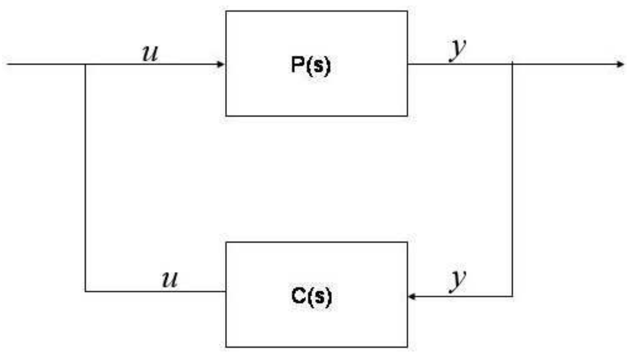


Figura 13.1. Schema a blocchi di un sistema SISO

funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa e' la seguente:

$$P_{cc} = \frac{P(s)}{1 - P(s)C(s)}$$

dove $C(s)$ e' la funzione di trasferiento del regolatore, cioe:

$$U(s) = C(s)Y(s)$$

Il regolatore in spazio di stato e' dato dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \\ u &= -K\hat{x} \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - BK - LC)\hat{x} + Ly = A_C\hat{x} + B_C y \\ u &= -K\hat{x} = C_C\hat{x} \end{aligned}$$

La sua rappresentazione tramite funzione di trasferimento e' quindi data da:

$$C(s) = C_C(sI - A_C)^{-1}B_C = -K(sI - (A - BK - LC))^{-1}L$$

É importante notare che A_C, al pari di A potrebbe risultare instabile per delle particolari scelte di K e L; tuttavia il sistema a catena chiusa:

$$P_{CC}(s) = \frac{P(s)}{1 - P(s)C(s)}$$

puó essere reso stabile sotto le ipotesi standard di raggiungibilita' e osservabilita'. Anzi, e' possibile dimostrare che alcuni processi instabili possono essere stabilizzati solamente da controllori instabili. In altri casi invece, e' possibile trovare sia controllori stabili che instabili che stabilizzano un particolare processo. In questo caso e' sempre buona norma cercare un controllore stabile per evitare problemi di divergenza in caso di rotture di attuatori e sensori.

- $A = A_0 + \Delta_A$
- $B = B_0 + \Delta_B$
- $C = C_0 + \Delta_C$

con A_0,B_0 e C_0 note (valori nominali) e Δ_A, Δ_B e Δ_C (errori di modello) non note ma di cui si conosce la massima incertezza.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix}$$

Con dei calcoli algebrici si ottiene:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A_0 + \Delta_A)x - (B_0 + \Delta_B)K\hat{x} \\
&= (A_0 + \Delta_A)x - (B_0 + \Delta_B)K(x - e_x) \\
&= (A_0 - B_0K)x + B_0Ke_x + (\Delta_A - \Delta_BK)x + \Delta_BKe_x
\end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
\dot{e_x} &= (A_0 + \Delta_A)x - (B_0 + \Delta_B)u - (A_0\hat{x} + B_0u + L((C_0 + \Delta_C)x - C_0\hat{x})) \\
&= (A_0 - LC_0)e_x + \Delta_Ax - L\Delta_Cx - \Delta_BK\hat{x} \\
&= (A_0 - LC_0)e_x + \Delta_Ax - L\Delta_Cx - \Delta_BKx + \Delta_BKe_x \\
&= (A_0 - LC_0)e_x + \Delta_BKe_x + (\Delta_A - L\Delta_C - \Delta_BK)x.
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e_x \end{bmatrix} = \underbrace{\left(\begin{bmatrix} A_0 - B_0K & B_0K \\ 0 & A_0 - LC_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_A - \Delta_BK & \Delta_BK \\ \Delta_A - L\Delta_C - \Delta_BK & \Delta_BK \end{bmatrix} \right)}_{A_z = A_{z_0} + \Delta_{A_z}} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix}$$

Considerando che gli autovalori variano in maniera continua dai parametri delle matrici Δ_A, Δ_B e Δ_C, se l'incertazza sugli errori di modello e' sufficientemente piccola e' possibile garantire per continuita' che se A_{z_0} e' strettamente stabile, allora anche $A_z = A_{z_0} + \Delta_{A_z}$ e' strettamente stabile.

13.1.3 Inseguimento del segnale di riferimento

Come devono essere scelti i valori L e K per rendere il sistema piú performante possibile? Come deve essere scelto $\lambda(A - LC)$?
Affinché $\hat{x} \to x$ piú velocemente devo scegliere $\lambda(A-LC)$ piú negativi (veloci) di $\lambda(A-BK)$. É importante notare che non bisogna scegliere L troppo grandi perché amplificano il rumore di misura e per evitare che l'errore e_x abbia dei picchi elevati nella fase iniziale di transitorio che potrebbero indurre il controllore a richiedere elevati segnali di controllo.

$$\hat{x} = (A - LC) + Bu + L(y + d_y)$$

con d_y rumore di misura.

Una regola approssimativa per la progettazione degli autovalori della matrice dello stimatore e' quello di sceglierli 3-10 volte piu' veloci di quelli del controllore in modo tale da avere un buon compromesso fra velocita' di inseguimento e reiezione dei disturbi di uscita.

$$|\ \lambda(A - LC)\ | \simeq 3 - 4\ |\ \lambda(A - BK)\ |$$

Come inseguire il riferimento:

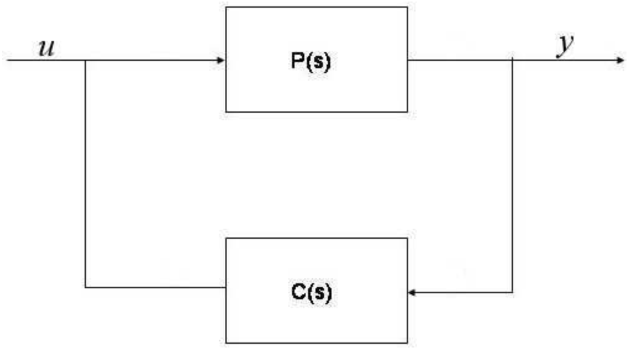


Figura 13.2. Schema a blocchi con P(s) e C(s)

con C(s)= regolatore + retroazione di stato.
Quindi ne risulta un sistema del tipo:

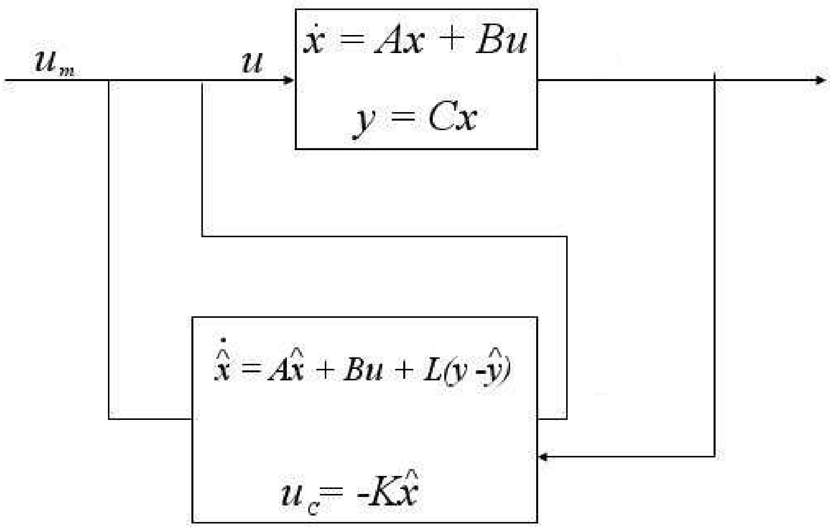


Figura 13.3. Schema a blocchi stimatore + retroazione di stato

Le equazioni di stato possono essere cosí riassunte:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BK) & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_m$$

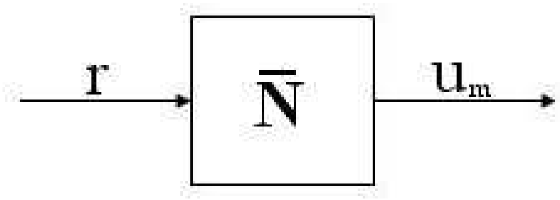


Figura 13.4. Schema a blocchi del sistema

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} C & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e_x \end{bmatrix}$$

Occorre anche notare che cosí come y → r, $\bar{N}$ deve essere scelto tale che:

- $y_{DC} = r_{DC}$
- $u_m = \bar{N} r_{DC}$

Se x → x_{DC} e $e_x \rightarrow e_{xDC}$, allora $\dot{x} \rightarrow 0$ e $\dot{e_x} \rightarrow 0$.
Quindi:
$\dot{e_x} = (A - LC)e_x \rightarrow 0 \Rightarrow e_x \rightarrow 0$.
In conclusione:

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe_x + B\bar{N}r_{DC}$$

E poiché $\dot{x}$ e BKe_x tendono a 0 la formula precedente si semplifica in:

$$(A - BK)x_{DC} + B\bar{N}r_{DC} = 0$$

$\Rightarrow x_{DC} = -(A - BK)^{-1} B\bar{N}r_{DC}$.

L'uscita pertanto é :

$$y_{DC} = Cx_{DC} = \underbrace{-C(A - BK)^{-1}B}_{\in \mathbb{R}} \bar{N} r_{DC} = r_{DC}$$

$$\bar{N} = \frac{1}{-C(A - BK)^{-1}B}$$

quindi lo schema di controllo in feedforward risulta essere esattamente uguale a quello con retroazione di stato statica.

Allo stesso modo si dimostra che lo schema per il controllo integrale risulta essere esattamente lo stesso di quello con retroazione di stato statica, con l'unica accortezza di utilizzare come ingresso per lo stimatore esattamente lo stesso segnale in ingresso al processo, tenendo conto di eventuali blocchi di saturazione o di non-linearita' nell'ingresso.

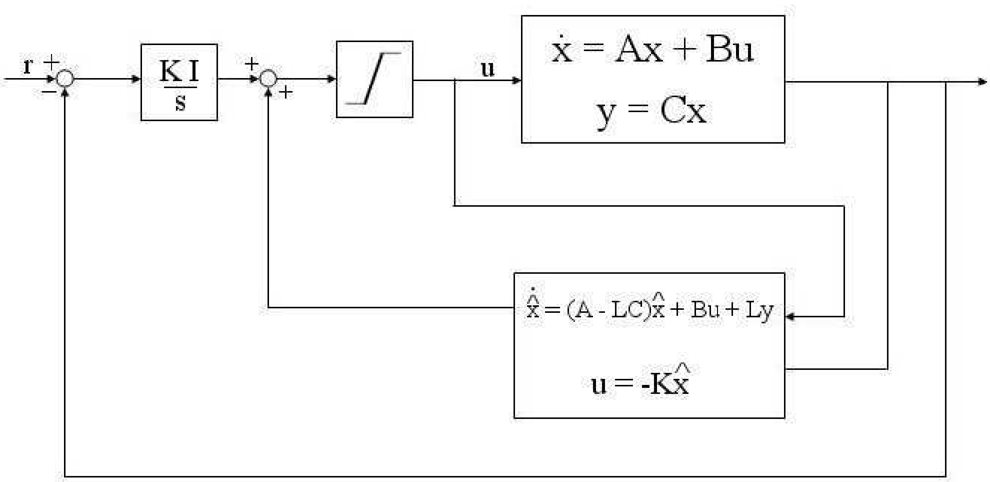


Figura 13.5. Schema a blocchi retroazione di stato