

## 14.1 Controllo digitale

Finora la trattazione del corso si è limitata alla considerazione di modelli continui, del tipo rappresentato in Fig.14.1.

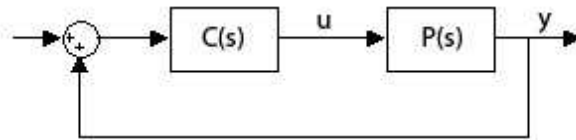


Figura 14.1. Modellizzazione di un sistema di controllo continuo

Ora, per quanto riguarda il controllo digitale, si fornisce una rappresentazione di  $C(s)$  in termini *discreti*, come si può notare dalla Fig.14.2 rappresentante la nuova modellizzazione del controllore digitale.

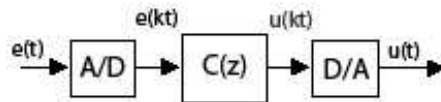


Figura 14.2. Schema equivalente di un controllore digitale

Il nuovo controllore è caratterizzato dalla presenza di tre blocchi, tutti *sincronizzati* attraverso il medesimo tempo di campionamento  $T$ . Il blocco  $A/D$  indica il convertitore *Analogico-Digitale*, che ha in ingresso il segnale  $e(t)$  ed in uscita la sua versione *discretizzata e quantizzata*  $e(kt) \in Q$ , come illustrato in Fig.14.3. Il blocco  $C(z)$  rappresenta il sistema dinamico a tempo discreto, mentre il blocco  $D/A$ , ovvero il convertitore *Digitale-Analogico*, riporta in uscita un segnale a tempo continuo  $u(t)$  attraverso un meccanismo di interpolazione, di cui il più comune è lo *Zero Holder* costante a tratti (Fig.14.4).

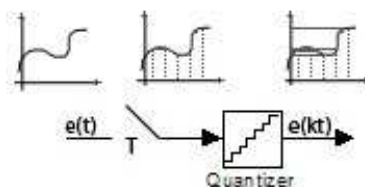


Figura 14.3. Schematizzazione di un convertitore A/D

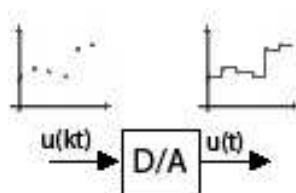


Figura 14.4. Schematizzazione di un convertitore D/A con Zero Holder

### 14.1.1 Rappresentazioni di un sistema dinamico a tempo discreto

Uno stesso sistema a tempo discreto ammette varie rappresentazioni equivalenti tra loro, in analogia al caso continuo:

1. Equazioni alle differenze

$$y(k) = -a_n y(k-n) - \dots - a_1 y(k-1) + b_m u(k-m) + \dots + b_0 u(k)$$

2. Funzione di trasferimento

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

oppure<sup>1</sup>

$$F(z^{-1}) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

3. Spazio di stato

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

4. Risposta impulsiva

$$g(k) = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ g(k) & \text{altrim.} \end{cases}$$

<sup>1</sup>Il passaggio da una rappresentazione all'altra si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per  $z$ , elevato al grado più alto tra  $m$  e  $n$

### 14.1.2 Trasformata zeta

Si definisce trasformata zeta di un segnale discreto  $f(k)$  causale, tale cioè che  $f(k) = 0 \forall k < 0$ , la funzione  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  :

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)](z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}$$

Ad esempio:

1. il segnale discreto  $f(k) = a^k$  ha come trasformata zeta una funzione definita per  $z > a$ :

$$F(z) = \mathcal{Z}[a^k](z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

2. dato un segnale discreto  $f(k)$  con trasformata  $F(z)$ , il segnale con ritardo  $f(k-1)$  ha come trasformata zeta:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(k-1)](z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k-1)z^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} f(k-1)z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-(k+1)} \\ &= z^{-1} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} \\ &= z^{-1}F(z) \end{aligned}$$

### 14.1.3 Passaggi tra rappresentazioni

#### Equazione alle differenze $\leftrightarrow$ Funzione di trasferimento

Sia dato un sistema dinamico discreto, rappresentato con un'equazione alle differenze:

$$y(k) = -a_n y(k-n) - \dots - a_1 y(k-1) + b_m u(k-m) + \dots + b_0 u(k)$$

Ricordando le regole della trasformata zeta,

$$\begin{aligned} Y(z) &= -a_n z^{-n} Y(z) - \dots - a_1 z^{-1} Y(z) + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0 + \\ &\quad + b_m z^{-m} U(z) + \dots + b_0 U(z) \end{aligned}$$

dove i coefficienti  $c_{n-1}, \dots, c_0$  sono dati dalle condizioni iniziali di  $y(k)$ . Si ricava dunque:

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \underbrace{\frac{b_0 + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}}_{\text{funzione di trasferimento}} U(z) + \underbrace{\frac{N_0(z^{-1})}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}}_{\text{condizioni iniziali}} \\
 &= \underbrace{\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})}}_{Y_u(z)} U(z) + \underbrace{\frac{N_0(z^{-1})}{D(z^{-1})}}_{Y_0(z)}
 \end{aligned}$$

dove  $Y_u(z)$  è la trasformata zeta della risposta forzata e  $Y_0(z)$  quella della risposta libera.

### Risposta impulsiva $\leftrightarrow$ Funzione di trasferimento

Data la risposta impulsiva  $g(k)$  del sistema, supponendo nulle le condizioni iniziali si può scrivere:

$$y(k) = (g * u)(k)$$

$$\downarrow \mathcal{Z}$$

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Quindi, il rapporto tra funzione di trasferimento e risposta impulsiva è:

$$G(z) = \mathcal{Z}[g(k)](z)$$

$$g(k) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)](k)$$

### Spazio di stato $\leftrightarrow$ Funzione di trasferimento

Scrivendo il sistema in forma di spazio di stato:

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + D(k) \end{cases}$$

e passando alle trasformate zeta, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1)z^{-k} = A \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k} + B \sum_{k=0}^{+\infty} u(k)z^{-k}$$

$$z \sum_{k=0}^{+\infty} x(k+1)z^{-(k+1)} = AX(z) + BU(z)$$

$$z(X(z) - x_0) = AX(z) + BU(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= (zI - A)^{-1}(zx(0) + BU(z)) \\
&\quad \Downarrow \\
Y(z) &= CX(z) + DU(z) \\
&= \underbrace{[C(zI - A)^{-1}B + D]}_{\text{funzione di trasferimento}} U(z) + C(zI - A)^{-1}zx(0) \\
&= G(z)U(z) + Y_0(z)
\end{aligned}$$

Per passare dalla rappresentazione in funzione di trasferimento a quella in spazio di stato bisogna tenere conto che non esiste un'unica configurazione di matrici  $(A, B, C, D)$  che soddisfi l'equazione

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

In maniera analoga a quella per i sistemi continui (vedi Lezione 2), si possono usare le forme canoniche di osservabilità o di raggiungibilità.

## 14.2 Analisi del comportamento di un sistema discreto dinamico

### 14.2.1 Stabilità

Utilizzando la rappresentazione in F.d.T., ed esprimendo i polinomi numeratore e denominatore secondo  $z^{-1}$ , si ha:

$$Y(z) = \frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} U(z) + \frac{N_0(z^{-1})}{D(z^{-1})}$$

Si ricorda inoltre che il polinomio denominatore può essere scomposto secondo:

$$D(z^{-1}) = \prod_{i=1}^n (1 - p_i z^{-1})^{m_i}$$

dove  $m_i$  è la molteplicità con cui un polo si presenta. Utilizzando questa scomposizione, si riduce facilmente la risposta libera nella somma dei suoi fratti semplici:

$$\frac{N_0(z^{-1})}{D(z^{-1})} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(1 - p_i z^{-1})^{m_i}}$$

dove  $\alpha_i$  è il residuo per  $z = p_i$ . Antitrasformando l'equazione precedente secondo la trasformata zeta si ottiene l'evoluzione libera:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{N_0(z^{-1})}{D(z^{-1})}\right] = y_0(k) = \sum_{i=1}^n \alpha_i k^{m_i} p_i^k$$

Questo porta ad una importante conclusione: perchè  $y_0(k)$  tenda a 0 per ogni condizione iniziale, occorre che  $|p_i| < 1$ .

### 14.2.2 Risposta ad un impulso discreto unitario

Ricordando che:

$$\mathcal{Z}[\delta(k)] = 1$$

si ricava la risposta forzata all'impulso antitrasformando la funzione di trasferimento, decomposta in fratti semplici.

$$\begin{aligned} Y(z) = F(z)1 &\Rightarrow y_u(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{(1 - p_i z^{-1})^{m_i}}\right] = \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i k^{m_i} p_i^k = g(k) \end{aligned}$$

Si definisce così  $g(k)$  come la risposta impulsiva del sistema.

### 14.2.3 Risposta ad un gradino discreto unitario

Ricordando che:

$$\mathcal{Z}[1(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

si ricava la risposta forzata al gradino, antitrasformando la funzione di trasferimento moltiplicata per la trasformata dell'ingresso.

$$\begin{aligned} Y(z) = F(z) \frac{1}{1 - z^{-1}} &\Rightarrow y_u(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z) \frac{1}{1 - z^{-1}}\right] = \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{(1 - p_i z^{-1})^{m_i}} + \frac{\beta_0}{1 - z^{-1}}\right] = \\ &= \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i k^{m_i} p_i^k \end{aligned}$$

dove, per il teorema del valore finale (applicabile tuttavia solo per sistemi stabili), si può identificare  $\beta_0$  come:

$$\beta_0 = \left[ F(z) (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 - z^{-1}} \right]_{z=1} = F(1)$$

### 14.2.4 Risposta ad un segnale periodico

La risposta forzata ad un segnale periodico si può calcolare in maniera analoga, ricordando che le operazioni di trasformata e antitrasformata  $\mathcal{Z}$  non alterano la frequenza dei segnali d'ingresso, e che modulo e fase dei segnali d'uscita si possono calcolare facilmente dalla F.d.T.

## 14.3 Modalità di progettazione in tempo discreto

Una volta riscontrate le analogie con i sistemi a tempo continuo, ci si pone il problema di *come* progettare un controllore a tempo discreto. Qui di seguito sono descritti due possibili approcci di progettazione.

### 14.3.1 Approssimazione di un controllore continuo

Questo approccio di progettazione si suddivide in due punti essenziali. La prima fase consiste nella progettazione di un controllore in tempo continuo  $C(s)$  che rispetti le specifiche assegnate; la seconda fase invece prevede di progettare un controllore a tempo discreto  $C(z)$  che, preceduto in serie da un campionatore e seguito da un interpolatore (spesso di ordine zero), fornisca delle uscite simili a  $C(s)$ .

### 14.3.2 Progettazione di un controllore discreto

Il secondo approccio sfrutta la conoscenza dell'interpolatore zero-holder  $H_0$ , e in special modo della sua struttura costante a tratti, per poter dire qualcosa di più sul segnale d'uscita  $y(t)$ . In particolare, dati  $(u_k)_{-\infty}^{+\infty}$ , è nota in maniera esatta  $y(kT)$ : ciò equivale a dire che, introducendo un segnale costante a tratti come ingresso di un processo continuo, la sua uscita negli istanti di campionamento  $kT$  coinciderà esattamente con l'uscita della sua controparte discreta.

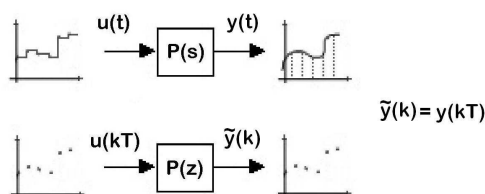


Figura 14.5. Comparazione tra continuo e discreto

Si può così definire il processo discreto come la serie di un interpolatore di ordine 0, il processo continuo e un campionatore, e progettare un controllore nel tempo discreto.

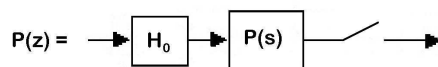


Figura 14.6. Schema equivalente di un processo discreto

Questa soluzione di progetto non presenta errori di approssimazione tra continuo e discreto, ed inoltre non dipende dalla frequenza di campionamento. Risulta così essere una scelta ottimale di progettazione nella maggior parte delle occasioni.