

## Lezione 16 — 7 Marzo

Docente: Luca Schenato

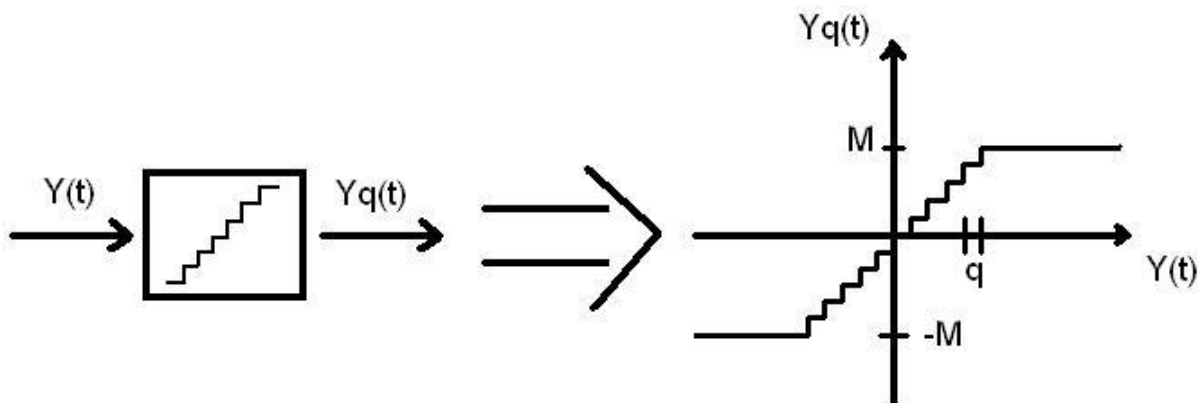
Stesori: C. Trinca, G. Gropuzzo, L. Antoniazzi, M. Favaro

## 16.1 Modello quantizzatore

Come è ben noto il quantizzatore un sistema tempo invariante non lineare. Si pu'ò anche aggiungere senza dubbio che il quantizzatore é un sistema deterministico perché ad ogni preciso ingresso corrisponde una precisa uscita. Sia  $x(t)$  l'ingresso in questione,  $y(t)$  l'uscita e sia  $q$  il passo di quantizzazione. Qual'ora sia  $n$  tale che  $nq \leq x(t) < (n+1)q$  la relazione tra l'ingresso e l'uscita è la seguente:

$$y(t) = nq \quad (16.1)$$

Qual'ora sia  $M$  il massimo valore che pu'ò essere assunto dall'uscita si ha che il passo di quantizzazione é dato da  $q = 2M/v$  dove  $v$  é il numero di valori che si possono avere in uscita, nel caso di uscita binaria con  $p$  bit si ha che  $v = 2^p$ . L'immagine sottostante rende piú chiaro il concetto appena esposto.

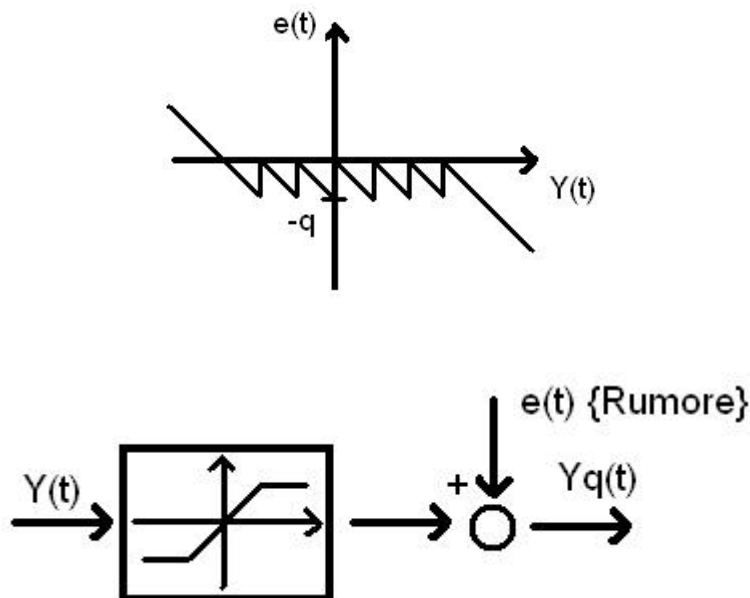


Definiamo ora l'errore di quantizzazione  $e(t)$  tale che sia:

$$y(t) = x(t) + e(t) \quad (16.2)$$

Risulta immediato capire che il grafico sottostante rappresenta l'errore in funzione dell'ingresso.

Un modello approssimativo ma molto utile del quantizzatore si ottiene modellizzando l'errore come un rumore bianco a media nulla di varianza  $\sigma^2 = q^2/12$ . Il modello ottenuto non é piú deterministico e pu'ò essere rappresentato dallo schema seguente:



## 16.2 Considerazioni sui controllori digitali

### 1. Sensibilità e quantizzazione dei coefficienti:

Sia la funzione di trasferimento discreta del controllore la seguente:

$$C(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0} \quad (16.3)$$

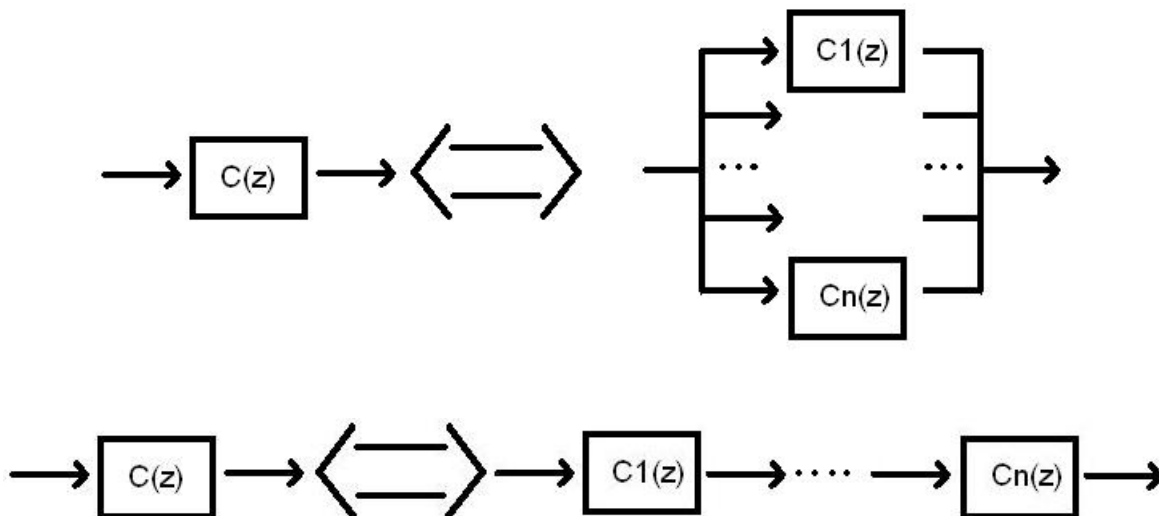
Dobbiamo ricordarci che oltre all'ingresso ed all'uscita anche i coefficienti del controllore digitale vengono elaborati al computer e quindi sono quantizzati e soggetti al rumore di quantizzazione. Diventa necessario implementare  $C(z)$  in modo che sia poco sensibile alle variazioni dei coefficienti.

Come è ben noto la funzione di trasferimento del controllore può essere scritta nel seguente modo:

$$C(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum \frac{\alpha_i}{z - p_i} = \sum C_i(z) \quad (16.4)$$

Dove  $C_i(z)$  sono tutti sistemi del primo o del secondo ordine. Lo schema a blocchi seguente di questa architettura parallelo rende più chiara l'idea.

Per risolvere il problema della quantizzazione dei coefficienti si può anche cercare di utilizzare l'architettura serie invece di quella parallelo la quale è rappresentata nella prossima figura.



Il problema della quantizzazione dei coefficienti può essere posto anche qual'ora  $C(z)$  sia scritta allo spazio di stato. Abbiamo quindi il seguente sistema:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (16.5)$$

Le matrici del sistema sono tali che  $C(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ . Per scegliere le matrici del sistema in modo opportuno ci sono vari modi però non ci siamo soffermati su questi metodi.

## 2. Limite del tempo di campionamento:

Senza soffermarci molto sul seguente fatto diremo solo che si potrebbero avere dei problemi se il tempo di campionamento diventa troppo piccolo. Infatti sia  $p_s$  il polo generico del controllore continuo allora il polo della versione discreta sarà  $p_z = e^{Tp_s}$  dove  $T$  è il tempo di campionamento. Si vede subito che per  $T$  che tende a zero tutti i poli della funzione di trasferimento discreta tendono a uno.

## 3. Realizzazione dell'integratore nel digitale:

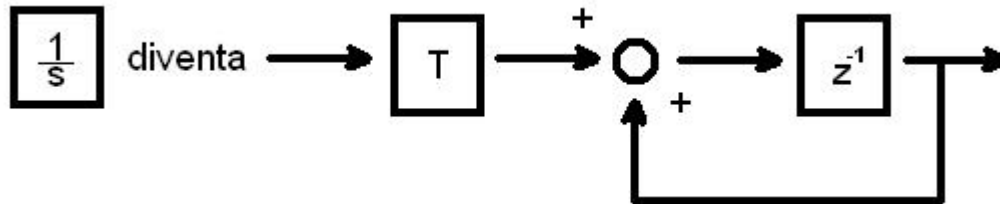
Consideriamo il termine che rappresenta un anticipo  $e^{sT}$ . Questo termine è certamente non lineare quindi procediamo alla sua linearizzazione mediante la seguente approssimazione:

$$e^{sT} \cong 1 + sT \quad (16.6)$$

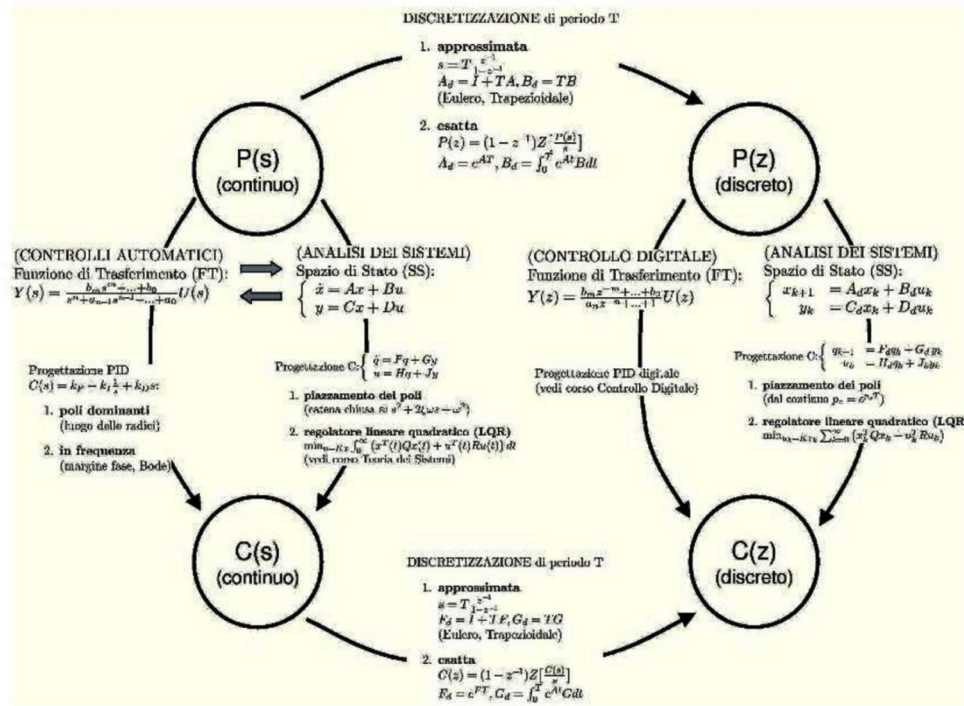
Poniamo ora l'approssimazione appena trovata uguale a z ottenendo:

$$s = \frac{z - 1}{T} \implies \frac{1}{s} = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{16.7}$$

Abbiamo così realizzato l'integratore con il seguente schema a blocchi.



Si intende ora rivedere, alla luce di quanto visto in tutte le lezioni tenute durante il corso, lo schema riepilogativo introdotto all'inizio e presentato in figura 1.2, qui ripresa per comodità.



Si è partiti considerando sistemi continui e analizzando varie tecniche di progettazione, iniziando con una progettazione di tipo controlli automatici.

In questa tecnica il punto di partenza è la funzione di trasferimento (nota) dalla quale si possono progettare analiticamente dei controllori piuttosto semplici (di cui i più utilizzati sono i PID) con due tecniche principali: quella basata sui poli principali, individuando lungo il luogo delle radici il piazzamento ottimale dei poli in catena chiusa; e quella basata su un approccio in frequenza, utilizzando il margine di fase e i diagrammi di Bode che risultano migliori come prestazioni perché riescono a tener conto di zeri e di altri termini che con la prima tecnica vengono considerati approssimati. Successivamente si è visto come passare dal sistema di riferimento allo spazio di stato (e viceversa). Nello spazio di stato si è seguito, per la progettazione di controllori, lo stesso approccio dei poli dominanti, progettando il controllore dapprima pensando di avere a disposizione tutto lo stato, e poi considerando quest'ultimo non disponibile a causa ad esempio della mancanza di determinati sensori, o per l'eccessivo rumore acquisito dagli stessi, realizzando uno stimatore. Pertanto, per costruzione, anche questa tecnica soffre ovviamente di tutte le problematiche dell'approccio a poli dominanti: non tiene conto degli zeri, dei problemi di cancellazione dei poli, ecc ecc. Di meglio si potrebbe fare utilizzando la tecnica di progettazione del controllo ottimo, a cui si darà accenno solo brevemente proprio nel paragrafo successivo, essendo argomento di corsi di studio diversi e successivi a questo. Tale tecnica si rende comunque strettamente necessaria per la progettazione della maggior parte dei sistemi, in quanto con la tecnica del piazzamento dei poli si riesce a risolvere agevolmente solo problemi di progettazione legati a sistemi relativamente semplici. L'introduzione dello spazio di stato è stata comunque necessaria in quanto è uno strumento che apre le porte ad uno spettro di possibilità ben più ampio, in quanto con la conoscenza di tecniche più avanzate del semplice piazzamento di poli, permette una progettazione di sistemi di controllo migliori e più raffinati. L'ultimo argomento preso in esame è stato quello della progettazione nel discreto. Si è accennato alla possibilità di usare PID digitali usando tecniche analoghe al margine di fase e ai diagrammi di Bode visti nell'analogico (argomento anche questo non competente al programma di questo corso), e ci si è invece concentrati su un approccio di progettazione in spazio stato che risulta inizialmente di più semplice comprensione. Seguendo tale approccio si parte con la progettazione nel continuo e con la scelta del piazzamento dei poli in catena chiusa e poi si mappano i risultati nello spazio  $z$ . Anche in questo caso, valgono le stesse considerazioni fatte già in precedenza riguardo a questo tipo di approccio che si porta dietro le stesse problematiche viste nella progettazione in spazio di stato (non si tiene conto degli zeri, dell'annullamento zeri-poli, ecc) e anche per questo caso, come per il continuo, esistono tecniche di progettazione più raffinate ad esempio analoghe al metodo lineare quadratico che funzionano altrettanto bene. Si è visto poi come passare da funzioni continue a quelle discrete usando forme approssimate (Eulero trapezoidale, Tustin) o tramite la trasformazione esatta, che si possono applicare sia a livello di funzione di trasferimento, per ottenere funzioni di trasferimento in  $z$  partendo da quelle in  $s$ , oppure per ottenere le matrici per il sistema discreto partendo da quelle del continuo. Per cui, la scelta finale si riduce a quale delle due strade scegliere per la progettazione nel discreto: o progettare tutto nel continuo e poi discretizzare il controllore, oppure discretizzare prima il processo e conseguentemente progettare il controllore direttamente nel discreto. Ovviamente la seconda offre prestazioni migliori per tempi di campionamento relativamente

bassi, ovvero per frequenze di campionamento comprese tra 10 e 20 volte la banda in catena chiusa. Al contrario per tempi di campionamento molto piccoli, paragonabili alla banda in catena chiusa del sistema, progettare prima nel continuo e discretizzare in seguito con una qualsiasi tecnica vista in precedenza, porta a risultati altrettanto validi con prestazioni pressoché identiche.

## 16.3 Problematiche non trattate ma di importanza non trascurabile.

### 1. Progettazione in spazio di stato tramite controllo ottimo

Questo metodo prevede una progettazione più precisa rispetto a quanto visto fin'ora. Invece di andare a piazzare i poli in catena chiusa in una certa regione di spazio approssimando il sistema da controllare con un sistema del secondo ordine, con questo metodo si va ad associare direttamente alla funzione di trasferimento del sistema un funzionale che rappresenta un termine di costo e la progettazione si riduce alla minimizzazione di questo funzionale di costo indipendentemente dalle equazioni della dinamica del sistema che si vuole controllare.

$$\min_{u(t)} \int_0^{+\infty} x^T(t)Wx(t) + u^T(t)Uu(t) d\tau \quad (16.8)$$

In pratica è un termine legato alla norma di  $x$  per cui rappresenta concettualmente l'errore che si va a commettere con il controllo. Ovviamente, ciò che si vuole è che l'errore sia piccolo, ma allo stesso tempo, non troppo, da far soffrire la realizzazione del controllo di problemi di saturazione o di ingressi troppo elevati. Il problema è non banale dal punto di vista matematico ma si risolve facilmente una volta definite le matrici, e si riesce a trovare facilmente un controllo sapendo che sarà di tipo  $W = I$  e  $U = \rho I$ .

Dal punto di vista progettuale non ci sono più parametri che negli altri casi: per  $\rho$  elevato si fa pesare più l'ingresso, si hanno ingressi più piccoli e il sistema diventa più lento; per  $\rho$  piccoli, il sistema diventa più veloce ma ci si ritrova in presenza di ingressi elevati. Il problema è non banale perché si tratta della soluzione di un'equazione non lineare, però in pratica si rivela un metodo molto efficace e facile da utilizzare in quanto ci sono a disposizione tecniche numeriche molto efficienti che risolvono il problema agevolmente per via numerica. Ciò che si vuole è ottenere un giusto bilanciamento tra la velocità del sistema (prestazioni) e l'ampiezza del controllo. In pratica la progettazione si riduce alla ricerca dei pesi o costi adatti. (Approfondimenti su questo argomento, come detto in precedenza, vengono trattati in corsi specifici successivi, quali ad esempio Teoria dei Sistemi e Laboratorio di Controlli 2).

Il metodo vale in modo analogo anche nel discreto, e si risolve in maniera del tutto

equivalente.

$$\min_{u(t)} \sum_0^{+\infty} x^T(k)Wx(k) + u^T(k)Uu(k) \quad (16.9)$$

Il metodo del controllo ottimo viene spesso identificato anche come metodo LQ (lineare quadratico).

## 2. Controllo ottimo con filtro di Kalman.

Il filtro di Kalman viene anche chiamato filtro lineare quadratico e permette la progettazione di stimatori per sistemi che nel discreto sono del tipo:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{aligned} \quad (16.10)$$

dove:

$w_k$  = rumore bianco di processo,  $w_k \sim N(0, Q)$

$v_k$  = rumore bianco di misura,  $v_k \sim N(0, R)$

entrambi sono di tipo gaussiano a media nulla e varianza rispettivamente Q e R definite positive. La stima di questi in un sistema pratico é abbastanza semplice. Per quanto riguarda il rumore di misura, questo é direttamente misurabile attraverso la sensoristica, mentre quello di processo si rivela determinabile solo tramite una simulazione che dia risultati simili al comportamento reale, una volta inserito un disturbo adeguato (corrispondente all'incognita) nel modello. Si andrá quindi a scegliere la matrice L dello stimatore in modo che sia minimo l'errore di stima:

$$L|\min[||x_k - \hat{x}_k||^2] \quad (16.11)$$

la dinamica dello stato stimato sará:

$$x_{k+1}^{\hat{}} = Ax_k^{\hat{}} + Bu_k + L(y_k - \hat{y}_k) \quad (16.12)$$

da cui quella dell'errore:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x_{k+1}^{\hat{}} = (A - LC)e_k + w_k + Lv_k \quad (16.13)$$

Si puó notare come sia possibile allocare in modo arbitrario i poli della matrice (A-LC), quindi rendere veloce a piacere la dinamica di annullamento dell'errore di stima. Questo però si paga con l'amplificazione del rumore di misura, mentre il rumore di processo non é influenzabile; la scelta del piazzamento dei poli, quindi della matrice L, sará pertanto di compromesso.

Il filtro di Kalman permette di scegliere L in maniera ottima secondo una funzione del tipo:

$$L = \text{Kalman}(A, B, C, D, Q, R) \quad (16.14)$$

che risulta talaltro la duale della precedente, per cui

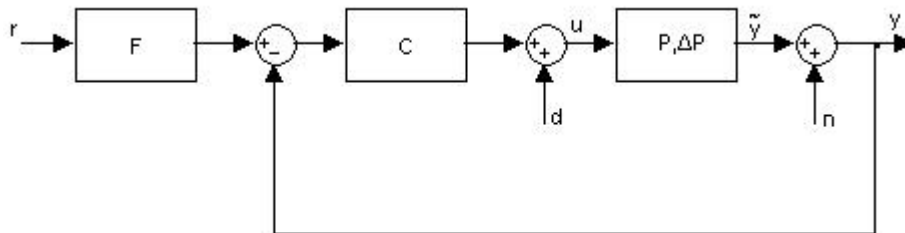
$$L = [f - \text{matlab}(A^T, B^T, C^T, D^T, Q, R)]^T \quad (16.15)$$

Ora si hanno a disposizione le tecniche per determinare le matrici K,L al fine di costruire quindi un regolatore ottimo del tipo a retroazione statica dallo stato stimato. Il criterio del controllo ottimo da quindi grande importanza alla progettazione in spazio di stato, che altrimenti presenta molti degli svantaggi tipici della tecnica basata sul luogo delle radici.

### 3. Funzioni di sensibilità e limiti fondamentali di controllo.

Non é detto che dato un qualsiasi sistema si possa determinare un controllo che rende stabile il sistema in catena chiusa, infatti vi sono dei limiti fondamentali e strutturali di controllo. Particolarmente difficili da controllare sono i sistemi a fase non minima, che si distinguono per avere zeri a parte reale positiva. Questi sistemi presentano tutta una serie di problematiche strutturali, che rendono difficile il controllo e non permettono di raggiungere una qualsiasi prestazione a piacere. Significativo ed interessante a proposito di questo argomento é l'articolo presente nel sito del corso, dal titolo Respect the Unstable - The practical, physical (and sometimes dangerous) consequences of control must be respected, and the underlying principles must be clearly and well taught.

Considerando ora lo schema classico di controllo in catena chiusa sotto riportato dove  $d$  é il disturbo di processo,  $n$  il rumore di misura e  $\Delta P$  l'incertezza sul processo; si definiscono alcune funzioni di trasferimento particolarmente significative che caratterizzano il sistema.



1. Disturbo di ingresso:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{P}{1 + PC} \quad (16.16)$$

2. Riduzione del disturbo:

$$\frac{Y_{ca}(s)}{Y_{cc}(s)} = \frac{1}{1 + PC} \quad (16.17)$$

é il rapporto tra le trasformate di Laplace di  $y$  in catena aperta e catena chiusa



3. Rumore di misura:

$$\frac{U(s)}{N(s)} + \frac{C}{1 + PC} \quad (16.18)$$

4. Incertezza del modello:

$$\frac{|\Delta P|}{|P|} < \frac{|1 + PC|}{|PC|} \quad (16.19)$$

espressa in rapporto percentuale

5. Errore in catena chiusa:

$$\frac{|\Delta T|}{|T|} = \frac{1}{|1 + PC|} \frac{|\Delta P|}{|P|} \quad (16.20)$$

espresso in rapporto percentuale.

Queste funzioni di trasferimento permettono un'analisi piú accurata del comportamento del sistema, consentendo l'analisi di aspetti che non compaiono nella funzione di trasferimento ingresso uscita. Il problema del controllo risulta pertanto piú complicato della semplice ottimizzazione, in quanto presenta diversi vincoli, che impongono delle scelte di compromesso.