

Lezione 3 — 19 Gennaio

Docente: Luca Schenato

Stessori: Baldo Fabio, Luca Lovato e Simone Gasparella

3.1 Sistemi del secondo ordine e modellizzazione

In questa lezione verranno studiati sistemi del secondo ordine a due poli e la modellizzazione di sensori e attuatori. Partendo da un sistema retroazionato di forma

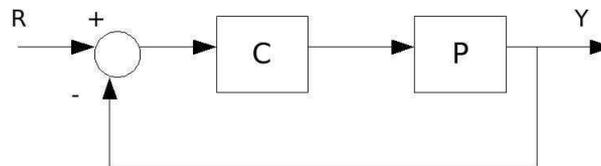


Figura 3.1. Sistema retroazionato

il nostro scopo è progettare un controllore $C(s)$ in modo che il nostro sistema retroazionato $P_{cc}(s) = \frac{CP}{1+CP}$ sia strettamente stabile presenti 2 poli che soddisfino le specifiche e gli altri poli siano sufficientemente negativi, in modo da poterne trascurare l'effetto sull'uscita. Quindi approssimeremo il sistema retroazionato $P_{cc}(s)$ con un sistema del secondo ordine $P_{II}(s)$, cioè $P_{cc}(s) \approx P_{II}(s)$.

3.1.1 Analisi di un sistema del secondo ordine

Un sistema del secondo ordine può essere scritto come:

$$P_{II}(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2}$$

dove: ω_n è la *frequenza di risonanza naturale*, ξ è il *coefficiente di smorzamento*, e K è il *guadagno a regime*. Poiché siamo interessati a fare in modo che $y(t) = r(t)$ a regime, questo implica che $P_{cc}(0) = K = 1$.

I poli del sistema corrispondono alle radici del polinomio al denominatore di $P(s)$ date dalle soluzioni di:

$$s^2 + 2s\xi\omega_n + \omega_n^2 = 0$$

Ponendo $\xi < 1$ ¹ otteniamo:

$$p_{1,2} = -\omega_n\xi \pm \sqrt{\xi^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = \omega_n(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})$$

¹Per $\xi \geq 1$ le radici sono reali e distinte. Questo caso però non è di grande interesse per il tipo di analisi che stiamo considerando e verrà quindi tralasciato.

Definiamo ora

$$\begin{aligned}\sigma &= \xi\omega_n \\ \omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\end{aligned}$$

dove $\tau_d = \frac{1}{\sigma}$ e' il *tempo di decadimento* e ω_d e' la *frequenza di massimo*. Utilizzando queste due nuove variabili possiamo scrivere i poli del sistema come

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$$

rappresentati graficamente in Figura 3.2:

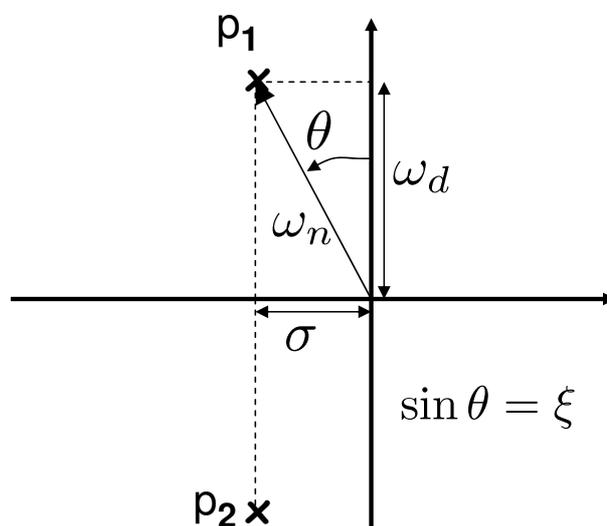


Figura 3.2. Poli di un sistema del secondo ordine

Si nota inoltre che

$$|p_{1,2}| = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} = \sqrt{\xi^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\xi^2)} = \omega_n$$

$$\sin \theta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{\omega_n \xi}{\omega_n} = \xi$$

Risposta a gradino

L'uscita del sistema di Fig. 3.1 ad un ingresso a gradino $u(t) = 1(t)$, puo' essere ottenuta in maniera analitica:

$$y_u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 + [a \sin(\omega_d t) + b \cos(\omega_d t)]e^{-\sigma t}$$

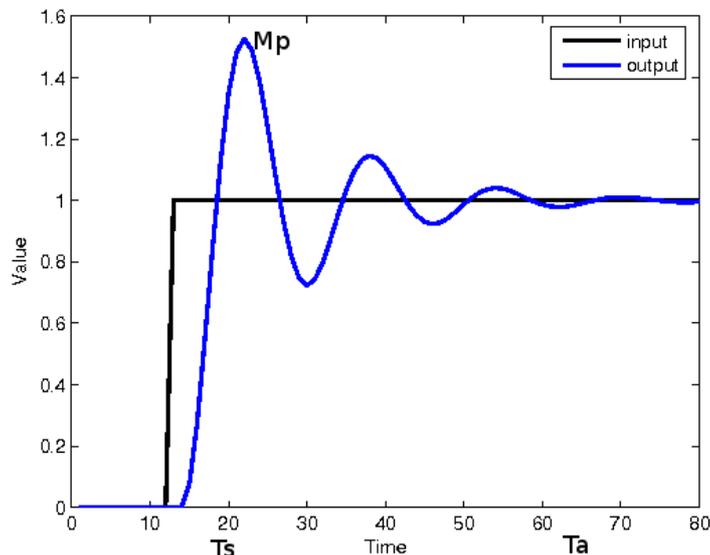


Figura 3.3. Risposta al gradino di un sistema lineare di secondo ordine

Nel grafico M_p indica la *sovraelongazione*, che può essere calcolata in modo esplicito utilizzando la formula:

$$M_p \approx e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Altri parametri importanti sono t_s indica invece il *tempo di salita* impiegato dal segnale per andare dal 10% al 90% del suo valore di regime, e il *tempo di assestamento* t_a ovvero il tempo impiegato dal segnale per assestarsi intorno al 10% del valore di regime, ovvero: $|y(t) - 1| < 0.1$

Il tempo di assestamento, il tempo di salita e la massima sovraelongazione sono tipiche specifiche per la prestazione di un generico sistema retroazionato. In particolare, per un sistema del secondo ordine è possibile calcolare la relazione esatta tra i parametri del sistema (ξ, ω_n) e i parametri di prestazione (M_p, t_a, t_s).

In particolare è possibile ricavare il valore minimo di ξ per garantire una sovraelongazione inferiore ad certo valore desiderato come indicato in maniera esplicita nella seguente tabella

ξ	M_p
0.7	5%
0.5	16%
0.3	35%

Tabella 3.1. Relazione tra sovraelongazione percentuale M_p e coefficiente di smorzamento ξ .

Il coefficiente di smorzamento ξ influenza la sovraelongazione, ed in parte anche il tempo di salita. Tuttavia, e' il parametro ω_n che piu' influenza sia il tempo di salita che di assestamento del nostro segnale. Aumentare ω_n significa riscaldare l'asse dei tempi, cioe' aumentare la prontezza del sistema. Dalle definizioni di tempo di salita ed assestamento e' possibile ricavare la loro dipendenza da ω_n in maniera esplicita. Qui ci limitiamo a darne solamente delle formule approssimate ma comunque sufficienti ai nostri scopi:

$$\omega_n \approx \frac{5.7}{t_a}, \quad \omega_n \approx \frac{1.8}{t_s}$$

dove le precedenti formule sono state calcolate supponendo $\xi = 0.7$, che il valore tipico usato in fase di progettazione.

Rappresentazione in frequenza

Le prestazioni di un sistema del secondo ordine in termini di capacita' di inseguimento possono essere analizzate anche da una sua analisi in frequenza. In Figura 3.4 sono rappresentati il modulo e la fase della funzione di trasferimento $P_{II}(j\omega)$. Il picco di risonanza del modulo si trova alla frequenza di risonanza $s = j\omega_n$ ed il valore del picco e' dato da $M_p = |P_{II}(j\omega_n)| = \frac{\omega_n^2}{|-\omega_n^2 + 2j\xi\omega_n + \omega_n^2|} = \frac{1}{2\xi}$.

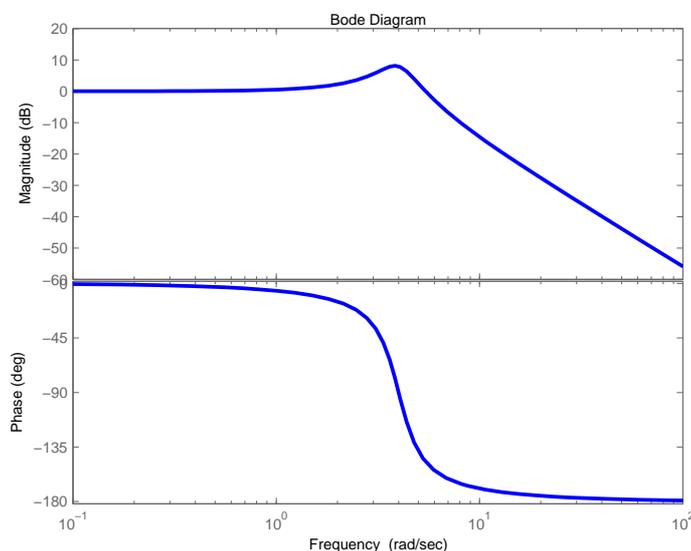


Figura 3.4. Diagrammi di Bode: Modulo e Fase

Come illustrato nella precedenti lezioni, il modulo e la fase della funzione di trasferimento corrispondono al termine amplificativo e di sfasamento in caso di ingresso di un segnale sinusoidale. Supponiamo di avere come ingresso un segnale periodico di periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ che

quindi possiamo rappresentare in termini di serie di Fourier data dal suo valore medio e in una somma di sinusoidi con frequenze multiple di ω_0 :

$$r(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 + \phi_k)$$

L'uscita a regime del sistema e' quindi data da:

$$y(t) = P_{II}(0)\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k |P_{II}(k\omega_0)| \cos(k\omega_0 + \phi_k + \angle P_{II}(k\omega_0))$$

Dal grafico di modulo e fase si vede che per avere un buon inseguimento di $r(t)$ da parte di $y_u(t)$ bisogna che lo spettro del segnale di ingresso presenti componenti di frequenze minore di ω_n , cioe' $a_k \approx 0$ per $k >^{sim} M = \frac{\omega_n}{\omega_0}$. Infatti in questo caso il nostro $P(s)$ ha la struttura di un filtro passa basso dove $|P_{II}(k\omega_0)| \approx 1$ e $\angle P_{II}(k\omega_0) \approx 0$ per $k < M$, quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} r(t) &\approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^M a_k \cos(k\omega_0 + \phi_k), \quad M\omega_0 < \omega_n \\ \implies y(t) &\approx P_{II}(0)\alpha_0 + \sum_{k=1}^M a_k |P_{II}(k\omega_0)| \cos(k\omega_0 + \phi_k + \angle P_{II}(k\omega_0)) \\ &\approx \alpha_0 + \sum_{k=1}^M a_k \cos(k\omega_0 + \phi_k) \approx r(t) \end{aligned}$$

Si noti inoltre come un elevato valore del picco di risonanza $\frac{1}{2\xi}$ porti all'amplificazione di segnali sinusoidali alla frequenza ω_n anche molto piccoli. Similmente a quanto visto nell'analisi fatta nel dominio del tempo, un valore troppo piccolo di ξ porta a sovraelongazioni notevoli o amplificazioni di rumore anche piccoli se questi hanno componenti vicino alla frequenza di risonanza ω_n .

3.1.2 Modellizzazione di sensori e attuatori ed altri elementi

Si consideri un modello di un processo fisico (P) influenzato tramite un attuatore (A) e misurato tramite un sensore (T) rappresentato nella seguente Figura 3.5:

u = segnale di controllo (tensione, corrente, etc.)

\hat{u} = dimensione o quantità fisica che influenza il processo (forza, apertura di una valvola, etc.)

y = quantità di interesse (temperatura, posizione di un giunto, etc.)

\tilde{y} = misura tradotta di y (tensione, corrente, etc.)

A = blocco attuatore

P = processo

T = blocco trasduttore

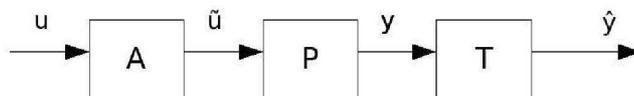


Figura 3.5. Modellizzazione di un processo con attuatore (A), processo vero e proprio P e trasduttore o sensore (T).

Trasduttori o sensori

Un trasduttore é un dispositivo che riceve in ingresso un segnale di riferimento di natura fisica (ad esempio l'angolo di un motore) e fornisce in uscita una grandezza elettrica proporzionale alla grandezza di ingresso (ad esempio la tensione di un potenziometro).

Se in teoria la funzione di trasferimento del sensore dovrebbe essere $y = \frac{1}{K_t} \tilde{y}$ come indicato nella seguente figura:

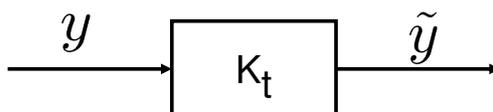


Figura 3.6. Modellizzazione di un trasduttore

Nella pratica pero' ci sono alcune non idealità che devono essere considerate:

1. Risoluzione/quantizzazione

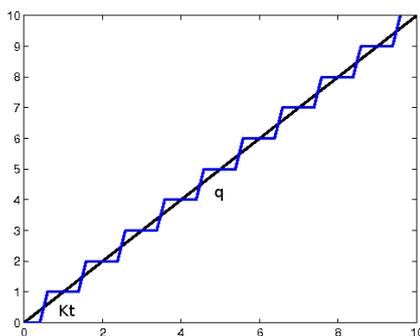


Figura 3.7. Quantizzatore

dove $q \equiv$ errore di quantizzazione $K_t \equiv$ inclinazione della retta di approssimazione

$$\tilde{y}(t) = y(t) + e(t) \quad \|e(t)\| < q$$

2. **Accuratezza** L'accuratezza del sensore e' legata agli errori sistematici dovuti per esempio a offset non nulli o a nonlinearita tra segnale di interesse y e misura del sensore \tilde{y} , come indicato nel pannello sinistro di Figura 3.8.

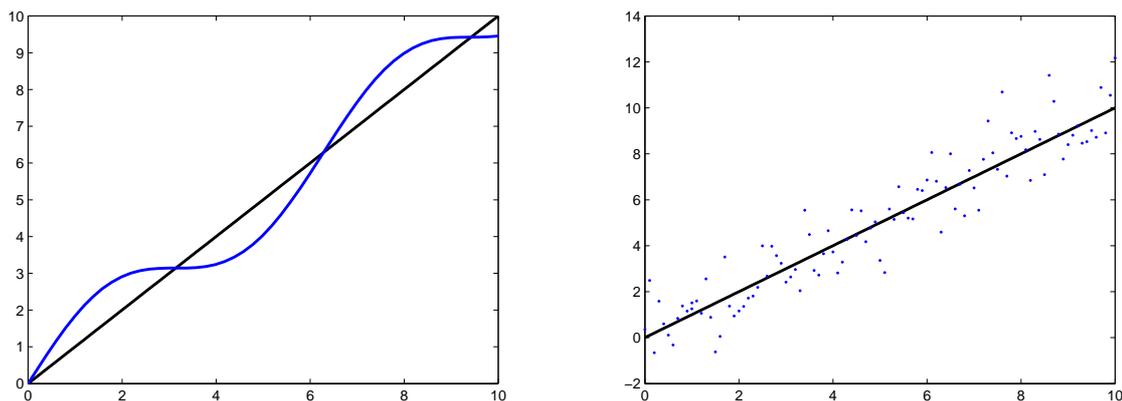


Figura 3.8. Accuratezza (sinistra) e ripetibilita' (destra).

In termini piu' formali possiamo dire che la misura del sensore e' legata alla quantita' di interesse da $\tilde{y} = f(y)$ dove $f()$ e' una funzione nonlineare, che pero' viene approssimata tramite una relazione lineare del tipo $\hat{y} = K_t y \approx \tilde{y}$.

Un modello piu' rappresentativo di questi errori e' dato da:

$$\tilde{y} = K_t y + e$$

dove $e = f(y) - K_t y$.

3. **Ripetibilita'** Concetto associato al rumore: ripetendo piu' volte nelle medesime condizioni un esperimento, si ottengono risultati diversi a causa dell'azione disturbatrice del rumore, come rappresentato nel pannello destro di Figura 3.8.

Un modello tipico per questo tipo di errori e' dato da $\tilde{y} = \frac{1}{K_t} y + e$ dove $e \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$ e' un rumore gaussiano come media nulla e varianza σ .

4. **Banda limitata** Alcuni sensori richiedono un certo tempo per avere una misura accurata nel caso ci siano cambiamenti improvvisi. Per esempio un sensore di forza e' spesso costituito da un sistema meccanico molla-massa-resistenza che richiede un certo tempo di assestamento. In pratica questi sensori si comportano come dei sensori passa basso ai quali e' associata una certa banda. E' importante tenere conto della banda di questi sensori nel caso in cui la banda del sistema a catena chiusa che si vuole progettare e' comparabile, che vengono quindi approssimati tramite un filtro passa basso

del primo ordine del tipo $T(s) = \frac{1}{1 + st_a}$, dove $t_a = \frac{2\pi}{\omega_B}$ e' approssimativamente il tempo di assestamento e ω_B la banda passante.

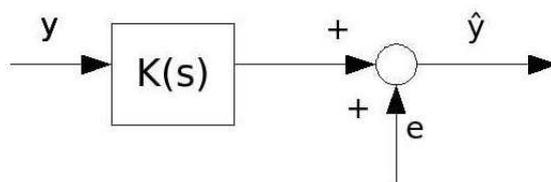


Figura 3.9. Banda limitata

Riassumendo possiamo descrivere molte delle nonidealita' appena illustrate tramite il seguente modello:

$$\tilde{y} = K_t \frac{1}{1 + st_a} y + e \quad (3.1)$$

dove il termine e include i contributi dovuti al rumore di quantizzazione, le nonlinearita' e i rumori termici.

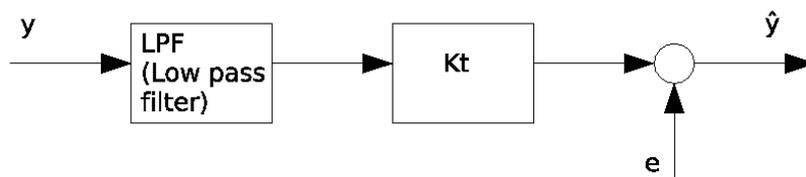


Figura 3.10. Modello generale per trasduttore

Ritardi

Il ritardo di un tempo T di un segnale dovuto per esempio al ritardo di trasporto o al ritardo di calcolo e' rappresentato nella seguente figura.

La trasformata di Laplace di un segnale ritardato nel tempo e' la trasformata del segnale per un'esponenziale elevato al ritardo. Quindi, nello schema a blocchi il blocco ritardo corrisponde ad un blocco e^{-sT} , cioe':

$$\mathcal{L}[u(t - T)] = e^{-sT}U(s)$$

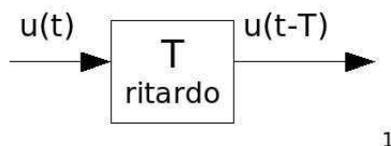


Figura 3.11. Ritardo

dove $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$. Siccome questa é una funzione non razionale, cerchiamo di approssimarla per renderla piú maneggevole. A tale scopo di serviremo dello Taylor arrestato al I ordine di e^{-st} é dato da:

$$e^{-st} \approx 1 - Ts \approx \frac{1}{1 + Ts}$$

dove la seconda approssimazione e' valida per Ts piccoli. Questa approssimazione e' anche nota come approssimazione di Pade' (0-1), dove i due numeri indicano il grado del numeratore e denominatore rispettivamente. Esistono approssimazioni di Pade' di ordine superiore, in maniera analoga alle approssimazioni tramite serie di Taylor. Per la approssimazione (1-1) risulta $\frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}}$; per quella (2-2) $\frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}}$. Per i nostri utilizzi la rappresentazione (0-1) risulta sufficientemente adeguata.

Convertitori ADC e DAC

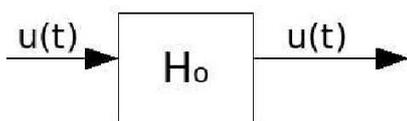


Figura 3.12. Filtro interpolatore

L'interpolatore, etichettato come H_0 nello schema a blocchi di Figura 3.12, riceve in ingresso gli impulsi e tiene costante il loro valore per un certo tempo T . Questo e' equivalente che la risposta impulsiva corrisponde ad un segnale con valore uguale a uno tra 0 e T e zero altrove, cioe' $h(t) = 1(t) - 1(T - t)$. La funzione di trasferimento e' quindi data dalla trasformata di Laplace della risposta impulsiva:

$$F(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \int_0^\infty e^{-sT} h(t) dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-sT}\right]_0^T = \frac{-1}{s} [e^{-sT} - 1] = \frac{-e^{-sT} + 1}{s}$$

e sviluppando nuovamente e^{-st} secondo Taylor, risulta:

$$F(s) \approx \frac{-1 + sT - \frac{s^2 T^2}{2} + 1}{s} \approx T \left(1 - \frac{sT}{2}\right) \approx T \frac{1}{1 + \frac{T}{2}s}$$

Come si vede da quest'ultima formula, l'interpolatore porta un ritardo di $\frac{T}{2}$ al segnale di ingresso. Quindi bisogna tenerne conto se il periodo di interpolazione é dello stesso ordine di grandezza del segnale di ingresso.

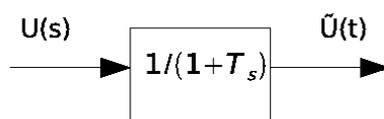


Figura 3.13. Ritardo d'interpolazione

Attuatori

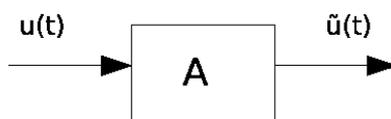


Figura 3.14. Attuatore

L'attuatore é un dispositivo che riceve in ingresso una grandezza elettrica (il nostro segnale di controllo) e fornisce in uscita una grandezza fisica (forza, apertura di una valvola, spostamento di un giunto) la quale va ad influenzare il nostro processo. L'attuatore puó essere approssimato tramite il seguente schema a blocchi:

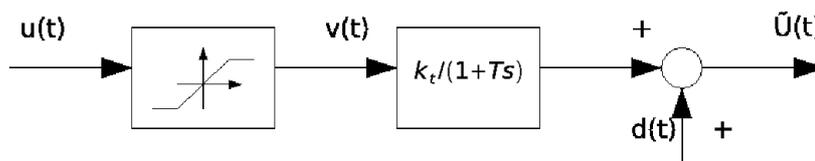


Figura 3.15. Schema a blocchi dell'attuatore

Il primo blocco é il blocco di saturazione, che mantiene il segnale lineare in un certo range di valori, e lo mantiene a un valore costante fuori da questo. Ovvero:

$$v(t) = \begin{cases} u_{max} & u > u_{max} \\ u & |u| < u_{max} \\ -u_{max} & u < -u_{max} \end{cases}$$

Il secondo blocco tiene conto di eventuali ritardi dovuti ad una banda limitata approssimata tramite un filtro passa basso del primo ordine, e infine vengono aggiunti eventuali disturbi esterni $d(t)$.