

Lezione 4 — 24 Gennaio

Docente: Luca Schenato Stesori: Simone Valmorbida, Stefano Meloni, Matteo Marzilli

4.1 Il motore in corrente continua

Il motore in corrente continua modellizzato costituisce un sistema definito elettromeccanico. I sistemi elettromeccanici sono costituiti da una parte elettrica e una parte meccanica. In particolare, nel sistema motore in corrente continua, l'input è una grandezza elettrica come la tensione o la corrente, e l'output è una coppia generata all'albero del motore. Il principio base di funzionamento di un motore in corrente continua risiede nel passaggio di corrente in un conduttore immerso in un campo magnetico.

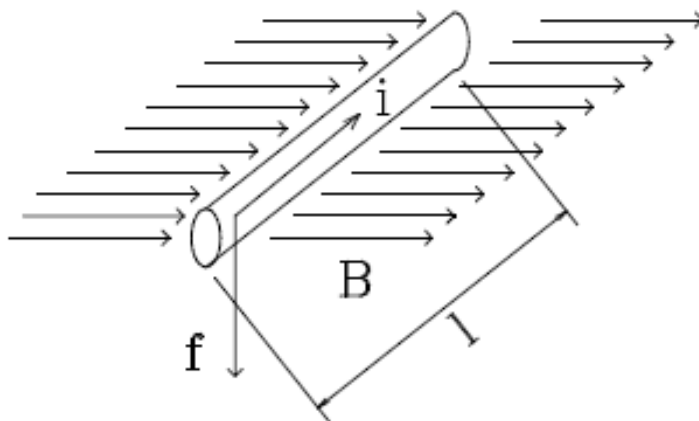


Figura 4.1.

Nella figura 4.1 sono presenti le seguenti grandezze:

- i : **Corrente** E' un vettore e mi rappresenta la corrente che circola nel conduttore.
- l : **Lunghezza** E' uno scalare e mi rappresenta la lunghezza del conduttore percorso dalla corrente I e immerso nel flusso B .

B: Campo magnetico E' un vettore e mi rappresenta il campo magnetico in cui è immerso il conduttore.

f: Forza E' un vettore e mi rappresenta la forza che viene generata sul conduttore.

α : Alpha E' l'angolo formato dal vettore B e il vettore i.

La forza risultante sul conduttore è espressa dalla formula:

$$\vec{f} = l * \vec{i} \times \vec{B}$$

dove $\vec{f} \perp \vec{i}, \vec{B}$ e $\|\vec{f}\| = l * i * B * \sin \alpha$

Si supponga ora una spira di forma circolare, di area A, percorsa da una corrente i ed immersa in un campo magnetico B.

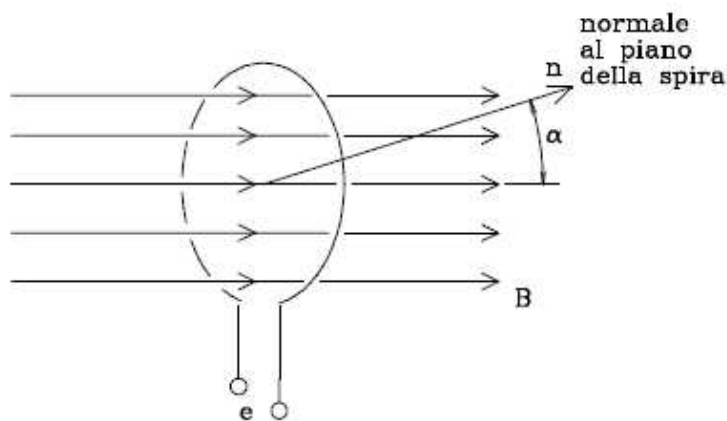


Figura 4.2.

Nella figura 3.1 il vettore \vec{n} è perpendicolare sia alla spira sia al vettore \vec{i}

Ora il flusso ϕ che si concatena con la spira è dato dalla formula:

$$\phi = A * \vec{n} * \vec{B} = A * B * \cos \alpha$$

Mentre la forza elettromotrice indotta sulla spira è:

$$f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = -A * B * (-\sin B(t)) * \dot{B}(t) = A * B * \sin(B) * \dot{B}$$

Passiamo ora a considerare una spira di forma quadra.

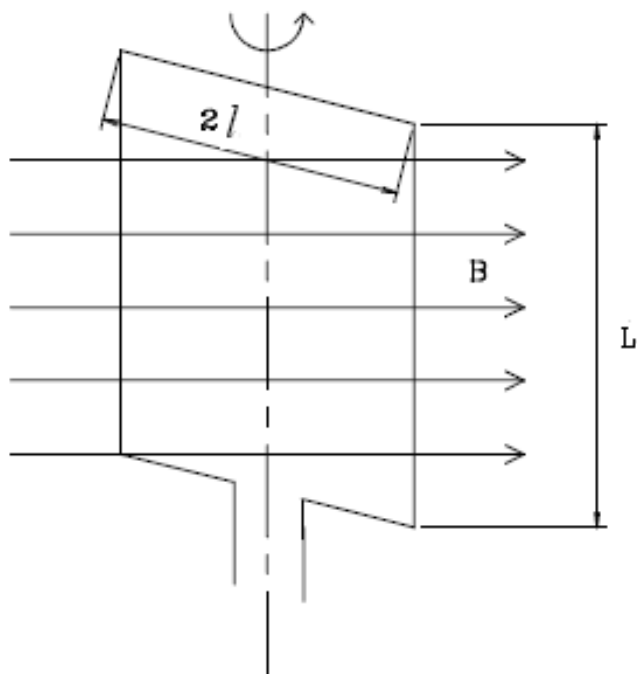


Figura 4.3.

Nel disegno di fig 3.3 ho delle forze risultanti sia sulle colonne di lunghezza L sia sui traversi di lunghezza $2l$.

Ma le forze generate sui due traversi che tenderebbero ad avvicinarli tra loro sono uguali e contrarie e quindi si annullano.

I due traversi risultano inoltre bloccati a livello meccanico.

Nella figura 3.4 è riprodotta la spira vista dall'alto.

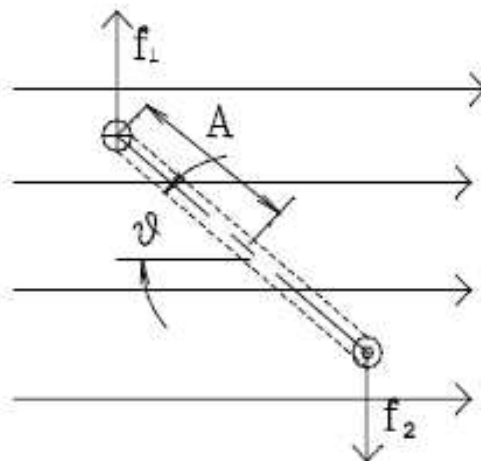


Figura 4.4.

Come si vede in figura sulle due colonne vengono generate le forze, la cui somma è una coppia torcente.

$$|\vec{F}_1| = i * L * B = |\vec{F}_2|$$

quindi $|F_1| = |F_2|$

Il momento dovuto alle forze torcenti agenti sulle due colonne si esprime come:

$$\tau = F_1 * l * \cos \vartheta + F_2 * l * \cos \vartheta$$

$$\tau = 2 * l * L * B * i * \cos \vartheta$$

Dove $2 * l * L = A$ è uguale all'area della spira .

La forza elettromotrice indotta risulta invece:

$$fem = A * B * \sin(\frac{\pi}{2} - \vartheta) * (\frac{\pi}{2} \dot{-} \vartheta)$$

$$fem = A * B * \cos \vartheta - \dot{\vartheta} = -A * B * \cos \vartheta * \dot{\vartheta}$$

La coppia torcente:

$$\tau_m = A * B * i * \cos \vartheta$$

La coppia generata da questa spira però è dipendente dall'angolo che la spira assume con il campo B.

Come in figura 3.5:

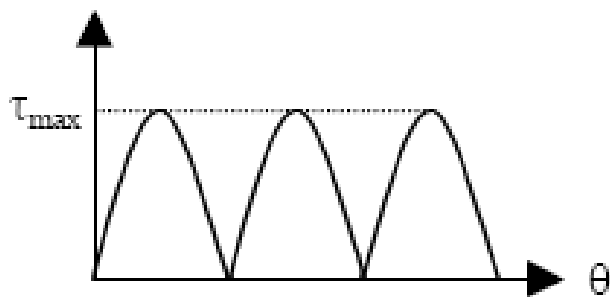


Figura 4.5.

L'obiettivo è avere una coppia circa costante e non dipendente dalla posizione delle spire. Questo si ottiene affiancando più spire distanziate di alcuni gradi l'una dall'altra. E piloti la corrente in maniera che scorra sulla spira che mi produce la massima coppia. Il risultato è di ottenere una coppia quasi costante pari alla coppia massima generabile dalle spire come si vede in figura 3.6:

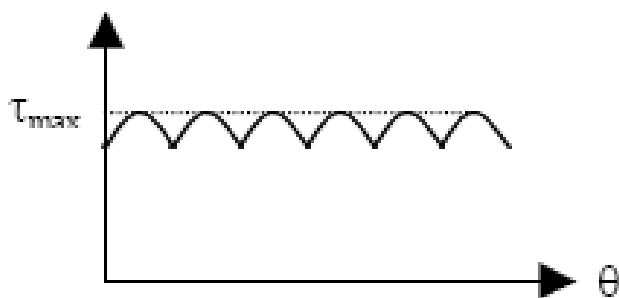


Figura 4.6.

4.2 Parte elettrica

Ad ogni spira è associato un circuito elettrico caratterizzato da una resistenza R e una induttanza L . Come mostrato in figura:

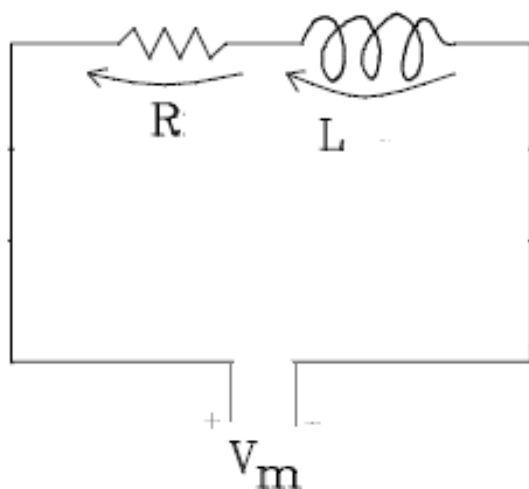


Figura 4.7.

$$V_m = R * i + L \frac{di}{dt} + fem \quad V_m = R * i + L \frac{di}{dt} + K_\phi \dot{\vartheta}$$

Dove K_ϕ è la costante di coppia.

$$fem = -A * B * \dot{\vartheta} = -K_\phi * \omega$$

con $\omega = \dot{\vartheta}$ velocità angolare del motore.

4.3 Parte meccanica

Al circuito elettrico della spira è associata una meccanica:

$J * \dot{\omega} = J\ddot{\vartheta}$ momento di inerzia.

$$J\ddot{\vartheta} = \tau_m - \tau_{attrito}$$

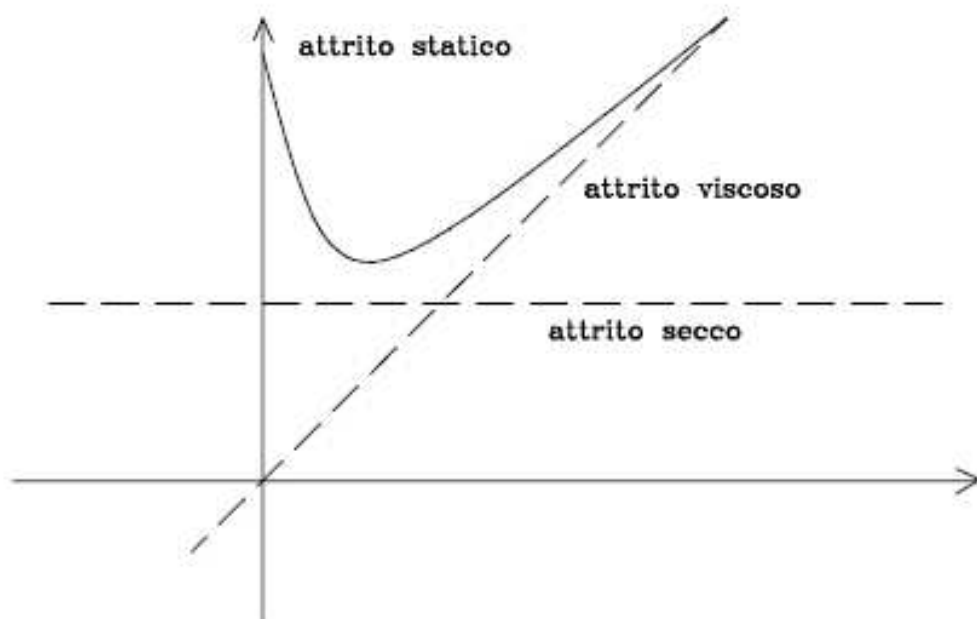


Figura 4.8.

$\tau_{attrito}$ non è lineare.

$$J * \ddot{\vartheta} \cong \tau_m - b_m * \omega$$

con $b_m * \omega$ attrito viscoso lineare.

4.4 Modellizzazione

Andremo ora a descrivere il comportamento del motore elettrico visto come sistema. Possiamo infatti pensare V_m come la grandezza di comando, o ingresso del sistema, e ϑ come la variabile di uscita.

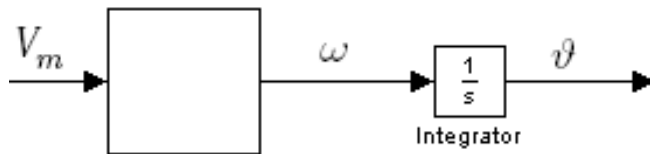


Figura 4.9.

Dalle precedenti equazioni otteniamo:

$$V_m = R * i + L \frac{di}{dt} + K_\phi \omega$$

$$J\dot{\omega} = K_\phi i - b_m \omega$$

Passando alle trasformate di Laplace si avrà':

$$V_m(s) = RI(s) + LsI(s) + K_\phi \Omega(s)$$

$$sJ\Omega(s) = K_\phi I(s) - b_m \Omega(s)$$

Raccogliendo:

$$(sJ + b_m)\Omega(s) = K_\phi I(s)$$

$$V_m(s) = (R + sL)I(s) - K_\phi \Omega(s)$$

Quindi risulta il seguente polinomio in s :

$$\Omega(s) = \frac{K_\phi}{(R+sL)(sJ+b_m)+K_\phi} = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)} V_m(s) = P(s)$$

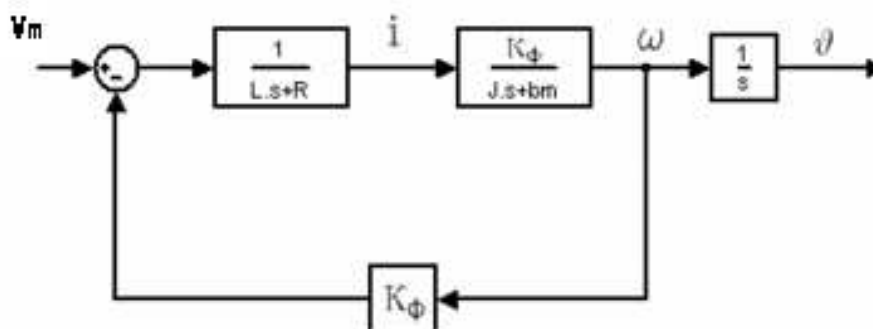


Figura 4.10.

In figura si può osservare lo schema a blocchi rappresentativo della funzione di trasferimento $W(s)$.

Di solito risulta l molto piccolo.

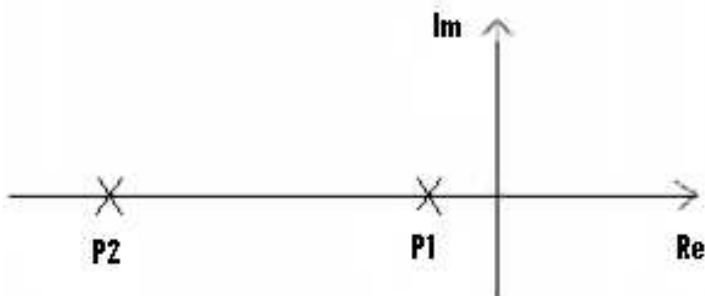


Figura 4.11.

Ne consegue che $[Re[p_2]] \gg [Re[p_1]]$, posso approssimare $P(s)$ con $\tilde{P}(s)$.

$$\tilde{P}(s) = \frac{K_\phi}{RJs + K_\phi^2 + Rb_m} = \frac{K_\phi}{RJ} \frac{1}{s + (K_\phi^2 + Rb_m)/RJ} = \frac{K^*}{s + p}$$

$$\text{con } K^* = \frac{K_\phi}{R_s} \text{ e } p = \frac{K_\phi^2 + Rb_m}{RJ}$$

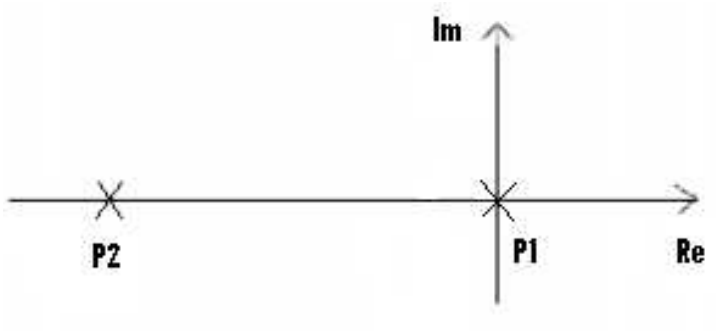


Figura 4.12.

4.5 Motore con motoriduttore

Si vedrà ora il comportamento del modello del motore elettrico, al quale viene aggiunto un motoriduttore, ed un carico.

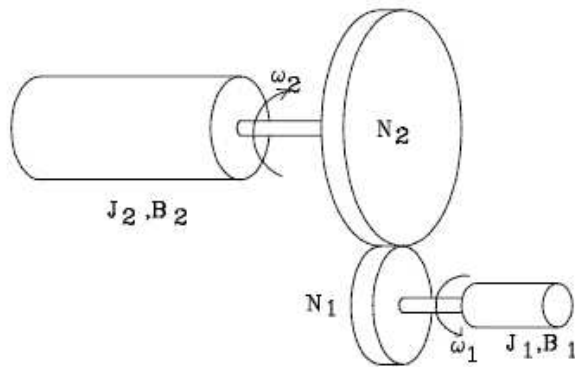


Figura 4.13.

Siamo interessati a trovare una funzione di trasferimento che metta in relazione la tensione di ingresso V_m e l'angolo di posizionamento del carico ϑ_l

N_m : Numero di denti della ruota collegata al motore

J_m : Momento d'inerzia del motore elettrico

J_l : Momento d'inerzia del carico

b_m : Coefficiente d' attrito del motore

b_l : Coefficiente d' attrito del carico

ϑ_m : Angolo di posizionamento del motore

ϑ_l : Angolo di posizionamento del carico

τ_1 : Momento torcente nel punto di contatto tra ruota e motore

τ_2 : Momento torcente nel punto di contatto tra carico e motore

Possiamo introdurre alcune ipotesi semplificative:

- 1) $L=0$, induttanza trascurabile.
- 2) nessuno slittamento $\implies \vartheta_m N_m = \vartheta_l N_l$
- 3) nessuna dissipazione di energia al contatto $\implies \tau_2 \dot{\vartheta}_l = \tau_1 \dot{\vartheta}_m$

Le equazioni diventano:

$$1) V_m = Ri + K_\phi \dot{\vartheta}_m$$

$$2) J_m \ddot{\vartheta}_m = K_\phi i - b_m \dot{\vartheta}_m - \tau_1$$

$$3) J_l \ddot{\vartheta}_l = \tau_2 - b_l \dot{\vartheta}_l$$

Definiamo ora il rapporto ruote come:

$$N = \frac{N_l}{N_m}$$

Sostituendo ottengo :

$$\vartheta_m = N \vartheta_l \implies \dot{\vartheta}_m = N \dot{\vartheta}_l \implies \tau_2 = N \tau_1$$

Le equazioni diventano:

$$2) (J_m N^2 + J_l) \ddot{\vartheta}_l = N K_\phi i - (b_m N^2 + b_l) \dot{\vartheta}_l$$

$$3) (J_m N^2 + J_l) \ddot{\vartheta}_l = N K_\phi i - (b_m N^2 + b_l) \dot{\vartheta}_l$$

Le relazioni per ottenere i parametri del sistema con motoriduttore a partire da quelli del motore sono:

$$J_{eq} \leftarrow J_m N^2 + J_l$$

$$b_{eq} \leftarrow b_m N^2 + b_l$$

$$K_\phi^{eq} \leftarrow N K_\phi$$

Quindi il motore con motoriduttore annesso può essere assimilato al sistema con il solo motore prestando però attenzione al sostituire i parametri equivalenti J_{eq} b_{eq} K_ϕ^{eq}

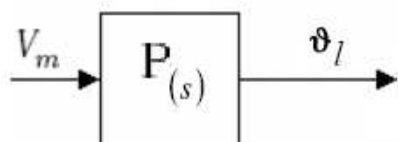


Figura 4.14.