Lezione 6 — 7 Febbraio

Docente: Luca Schenato *Stesori: Fiorio Giordano e Guiotto Roberto*

6.1 Progettazione nel dominio della frequenza

Il metodo più usato per progettare sistemi di controllo a retroazione si basa sulla risposta in frequenza perché garantisce risultati soddisfacenti anche con incertezze nei parametri e si presenta facile da realizzare, utilizzando strumenti come il diagrammi di Nyquist e Bode.
Prendiamo lo schema generale di Figura 1

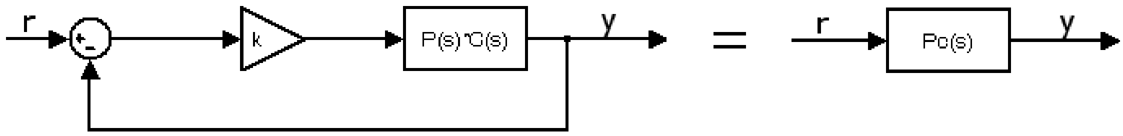


Figura 6.1. Nella figura K>0 e $K \in \Re$

Dove K è il parametro reale, e chiamiamo $G(s) = P(s)C(s) = \frac{s}{s(s+1)^2}$

6.1.1 Luogo delle radici

Nella figura 6.2 viene riportato il luogo delle radici.
Al variare del parametro K I poli in catena chiusa (rappresentati da quadrati) si spostano lungo il luogo delle radici. Il sistema rimane stabile finché la parte reale dei poli in catena chiusa rimane negativa. In questo caso il sistema rimane stabile finche K non raggiunge un valore critico K_c nel quale le radici sono immaginarie pure o nulle.

$$\begin{cases} K = 0 & \text{Instabile;} \\ 0 < K < K_c & \text{Stabile;} \\ k > K_c & \text{Instabile.} \end{cases}$$

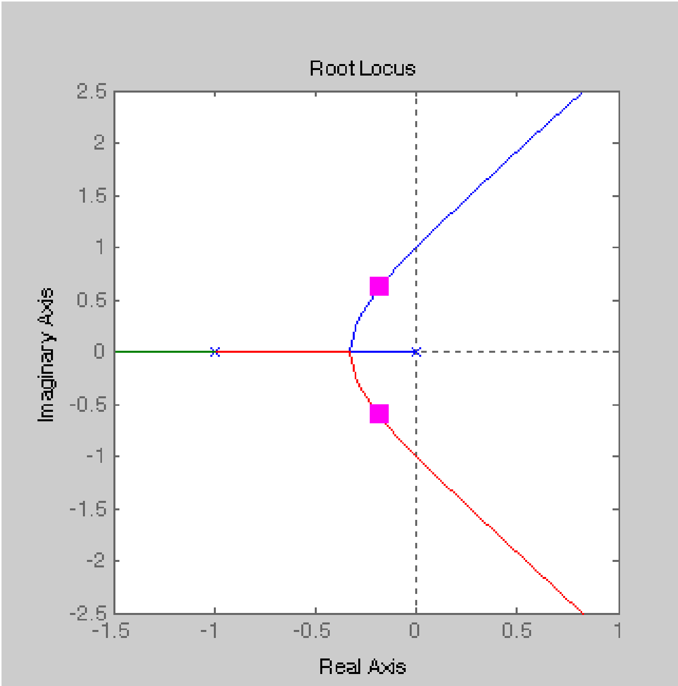


Figura 6.2. Luogo delle radici del sistema $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$

La funzione di trasferimento del sistema realizzato è: $\frac{KG(s)}{1+KG(s)}$ dalla quale si vede che $\exists K_c$: alcune radici di $1 + KG(s)$ sono immaginarie pure.

Inoltre $\exists\ \omega_c$: $1 + K_cG(j\omega_c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |K_cG(j\omega_c)| = 1 \\ \angle K_cG(j\omega_c) = -\pi \\ K_cG(j\omega_c) = -1 \end{cases}$

6.1.2 Progettazione con il criterio di Nyquist

Il diagramma di Nyquist è la rappresentazione nel piano immaginario dei valori assunti dalla funzione di trasferimento al variare della frequenza.
Può essere intesa come una funzione G: $\Re \rightarrow C$ dove $\omega \in \Re$ e s sarà la variabile complessa del codominio.

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2}$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow G(j\omega) = 0$

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow g(j\omega) \rightarrow \infty$

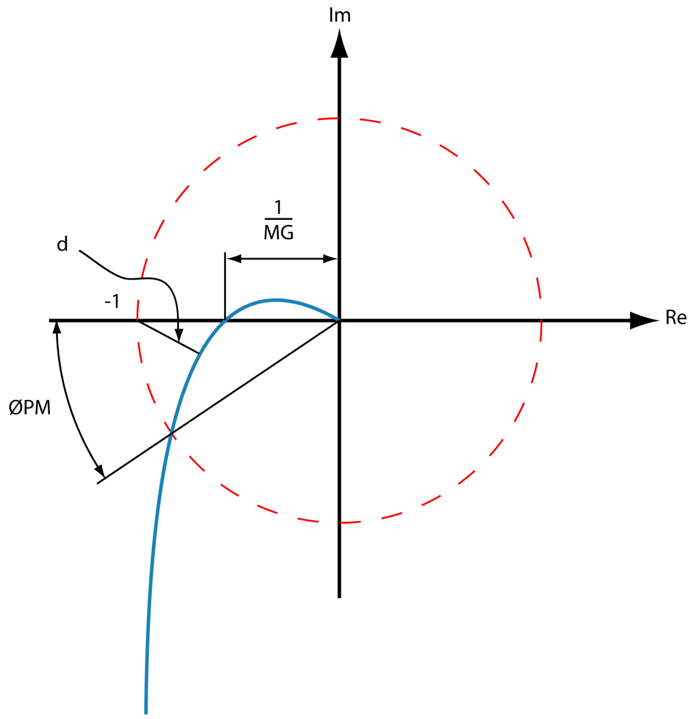


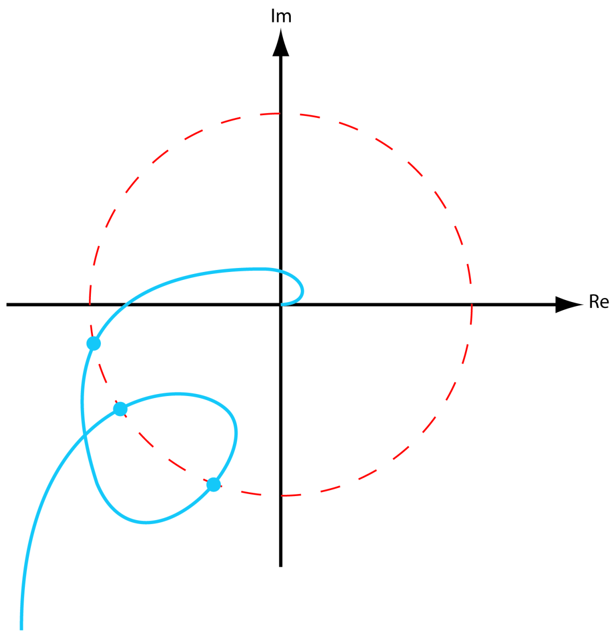
Figura 6.3. Diagramma di Nyquist di $KG(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega)^2}$

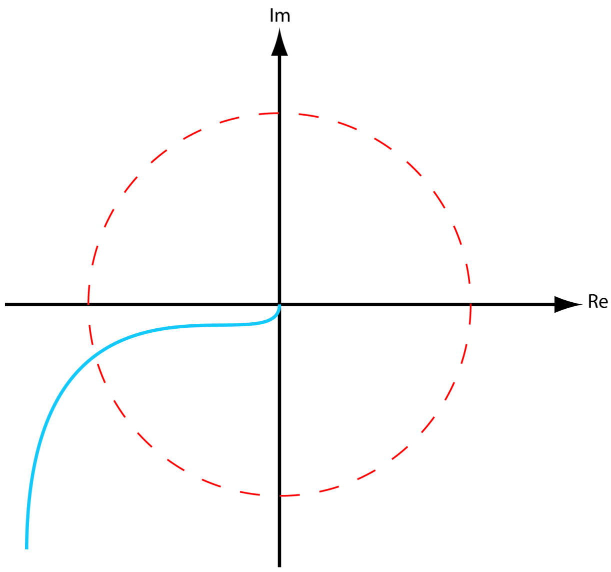
Variando il parametro K si scala il diagramma e si raggiunge il valore critico Kc quando il grafico passa per -1.
Vediamo ora alcuni parametri per valutare la stabilità con il diagramma di Nyquist

$\frac{1}{MP}$: **Margine di guadagno** MG è il fattore per cui può essere moltiplicato il guadagno prima di avere instabilità. $\frac{1}{MP} \begin{cases} < 1 & \text{Instabile;} \\ > 1 & \text{Stabile;} \end{cases}$

ϕ_{pm}: **Margine di fase** è la quantità di cui la fase supera $+180°$ quando $|G(j\omega)| = 1$.
Per $\phi_{pm} \begin{cases} < 0 & \text{Instabile;} \\ > 0 & \text{Stabile;} \end{cases}$

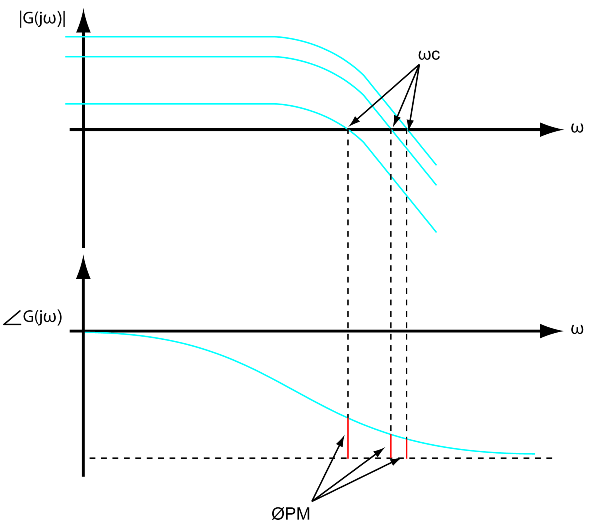
d: **Margine di vettore** rappresenta la distanza minima tra il grafico e il punto -1.





Ci sono dei casi in cui ϕ_{pm} e MG poco indicativi, per esempio:
Nel caso di sinistra il grafico passa più volte per il cerchio unitario, si deve allora Scegliere il ϕ_{pm} minore.
Nel caso di destra il margine di guadagno è infinito.
Il margine di vettore non ha di questi problemi, ma è poco usato perchè difficile da calcolare.
Inolte ϕ_{pm} e MG sono visibili anche sul diagramma di BODE.

6.1.3 Diagrammi di Bode



I diagrammi di Bode sono due grafici dove uno rappresenta il guadagno in decibel al variare della frequenza e l'altro rappresenta la variazione di fase. Variando K si modifica il guadagno di G con una conseguente variazione di ω_c. La fase rimane invariata quindi si ha uno spostamento del margine di fase.
Per tracciare il diagramma di Bode si può partire dal diagramma di Nyquist.
Pc=$\frac{KG(j\omega)}{1+KG(j\omega)}$

1. Per $\omega = 0 \Rightarrow Pc(0) = \frac{KG(0)}{1+KG(0)}$ supponiamo che $G(0) \neq \infty$ e positivo
   $Pc(0) = \frac{K*KG}{1+K*KG} \approx 1$ per K»1 inoltre la fase risulta $\angle Pc(0) = 0$
2. Per $\omega \to \infty \Rightarrow Pc(\infty) = 0$
3. Per $\omega \approx \omega_c \Rightarrow |Pc(j\omega_c)| = \frac{|KG(j\omega_c)|}{1+KG(j\omega c)} \approx \frac{1}{\phi_{pm}}$ e $\angle Pc(j\omega_c) \approx \frac{-1}{j\phi_{pm}} \approx \frac{-j}{\phi_{pm}}$.

$Pc(s)$ è approssimato con un sistema del secondo ordine .
Con $G(s)$ generica $\Rightarrow Pc(s) = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} \approx P_{II}(s)$
ω_c è legata al tempo di assestamento, mentre $\frac{1}{\phi_{pm}}$ è legata a ξ, che è a sua volta legata alla sovraelongazione.

$P_{II}(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+\alpha\xi s+\omega_n^2}$

Il diagramma di Bode di un sistema del secondo ordine si presenta come in figura 6.4

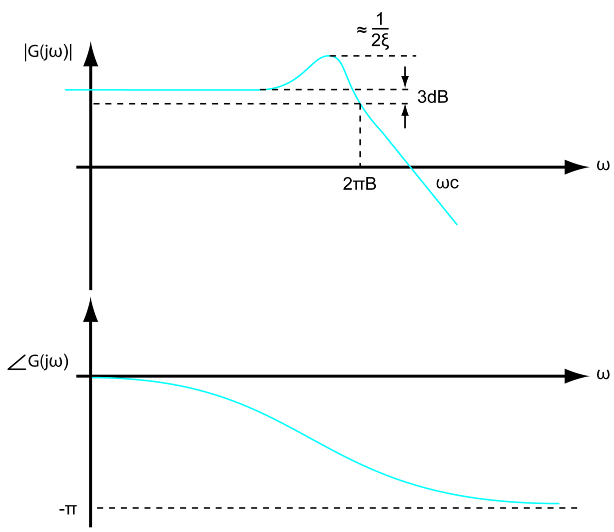


Figura 6.4. Diagramma di Bode di un sistema di secondo grado

$\omega_n \approx 2\pi B$ e $\frac{1}{2\xi} \approx \frac{1}{PM}$

Nella progettazione dati il tempo di assestamento e la Sovraelongazione si ottengono facilmente il margine di fase e la frequenza di attraversamento. Con il diagramma di Bode si vede anche la banda del sistema B, cioè la frequenza alla quale una sinusoide in ingresso è attenuata di e dB rispetto ad una sinusoide unitaria.
Tipicamente $\omega_c \leq 2\pi B \leq 2\omega_c$.

6.1.4 Considerazioni finali

1. Vengono considerati gli zeri.
2. Il margine di guadagno ed il margine di fase sono solo fattori indicativi della prestazione mentre il margine di vettore è più affidabile.
3. La progettazione in frequenza si applica in questo modo:
   a) Dal tempo di assestamento si determina la banda passante e la frequenza di attraversamento
   b) Dalla sovraelongazione si ricava ϕ_{pm}
   c) Progettare $C_{(s)} : |G(j\omega_c)P(j\omega_c)| = 1$ e $\angle G(j\omega_c)P(j\omega_c) \geq \phi_{pm} - 180$
4. Attenzione alla stabilità con il criterio di Nyquist
5. La struttura di $C(s)$ deve essere predefinita e poi viene aggiustata. Per esempio in un controllore PID il guadagno proporzionale modifica K, il guadagno integrativo elimina l'errore a regime, ma riduce il margine di fase, il guadagno derivativo aumenta il margine di fase, ma amplifica il rumore di uscita.