LabCont1: Laboratorio di Controlli 1	**II Trim. 2007**

Lezione 9 — 15 Febbraio

Docente: Luca Schenato — *Stesori: V. Derobertis, P. D'Errico, D. Vanti*

9.1 Progettazione tramite rappresentazione in spazio degli stati

9.1.1 Richiami di analisi dei sistemi

Un sistema lineare tempo invariante (LTI) può essere descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{9.1}$$

dove[1] $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$. Un vantaggio di tale rappresentazione è quello di poter usare sistemi con più ingressi e più uscite; infatti nel caso in cui l e p siano maggiori di 1 si parla di sistemi MIMO.

Per quanto riguarda le matrici che compaiono in (9.1) $A \in \mathbb{R}^{nxn}$, $B \in \mathbb{R}^{nxp}$, $C \in \mathbb{R}^{lxn}$, $D \in \mathbb{R}^{lxp}$.

9.1.2 Esempio: motore in c.c.

Come già visto nella lezione 4, le equazioni del motore sono:

$$v_m(t) = Ri(t) + K_\phi \dot{\vartheta}_m(t) \qquad \text{; parte elettrica (L=0)} \tag{9.2}$$

$$\tau_m(t) = K_\phi i(t) \qquad \text{; accoppiamento} \tag{9.3}$$

$$J\ddot{\vartheta}_m = -b\dot{\vartheta}_m(t) + \tau_m(t) \qquad \text{; parte meccanica} \tag{9.4}$$

$$v_{out}(t) = K_T \vartheta_m(t) \qquad \text{; sensore} \tag{9.5}$$

dove l'ingresso u è dato dalla tensione di armatura $v_m(t)$ e l'uscita y dalla tensione $v_{out}(t)$ misurata dal sensore.

Combinando (9.2) e (9.3) si ottiene

$$v_m = \frac{R\tau_m}{K_\phi} + K_\phi \dot{\vartheta}_m \Longrightarrow \frac{K_\phi v_m}{R} - \frac{K_\phi^2}{R}\dot{\vartheta}_m = \tau_m \tag{9.6}$$

[1] per i vettori è stato usato il grassetto

che combinata con (9.4) dà

$$\ddot{\vartheta}_m = -\frac{b}{J}\dot{\vartheta}_m + \frac{K_\phi}{JR}v_m - \frac{K_\phi^2}{JR}\dot{\vartheta}_m \tag{9.7}$$

e considerando che

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \vartheta_m \\ \dot{\vartheta}_m \end{bmatrix}; \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\vartheta}_m \\ \ddot{\vartheta}_m \end{bmatrix}; \quad u = v_m; \quad y = v_{out} \tag{9.8}$$

si ottiene:

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{bR+K_\phi^2}{JR} \end{bmatrix}}_{A}\mathbf{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_\phi}{JR} \end{bmatrix}}_{B} u \tag{9.9}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} K_T & 0 \end{bmatrix}}_{C}\mathbf{x} \tag{9.10}$$

9.1.3 Proprietà dello spazio degli stati

1. Permette l'analisi di sistemi MIMO.

2. Evoluzione del sistema:
   $\mathbf{x}(t)$ è dato dal contributo di due componenti, una libera, l'altra forzata:

   $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$$

   dove

   $$\mathbf{x}_l(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) \qquad \text{in cui} \qquad e^{At} \triangleq \sum_{n=0}^{\inf} \frac{(At)^n}{n!}$$

   e

   $$\mathbf{x}_f(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

   e l'uscita risulta dunque essere

   $$y(t) = C\mathbf{x}_l(t) + C\mathbf{x}_f(t) + D\mathbf{u}(t) = \underbrace{Ce^{At}\mathbf{x}(0)}_{\mathbf{y}_l(t)} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau + D\mathbf{u}(t)}_{\mathbf{y}_f(t)}$$

3. Funzioni di trasferimento:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}[\cdot]} \begin{cases} sIX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) = C\left[(sI - A)^{-1}B + D\right]U(s) \end{cases} \tag{9.11}$$

Il rapporto ingresso/uscita è quindi del tutto specificato dalla matrice di trasferimento $P(s)$ di dimensione[2] l x p.

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{N_{ij}(s)}{D(s)} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \qquad\qquad D(s) = det(sI - A) \tag{9.12}$$

4. Esistono infinite rappresentazioni in spazio di stato; infatti considerando $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$ dove $T \in R^{nxn}$, $\exists T^{-1}$ tale che

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = A_z\mathbf{z}(t) + B_z\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C_z\mathbf{z}(t) + D_z\mathbf{u}(t) \end{cases} \tag{9.13}$$

   che è una rappresentazione equivalente del sistema in questione.

   A tal proposito si ricorda che una realizzazione in forma di spazio di stato di un sistema lineare può rispecchiare le **equazioni fisiche** del sistema, può essere messa in **forma canonica** di controllo o di osservabilità o ancora in **forma bilanciata**.

5. Autovettori e Autovalori
   Def. $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore di una matrice quadrata A se $\exists \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \neq 0$:A$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, dove $\mathbf{v}$ è detto autovettore relativo all'autovalore λ.
   Se A $\in \mathbb{R}^{n\times n} \implies \lambda$ sono reali o complessi coniugati, cioè se $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ è autovalore, $\exists\lambda_2 = \lambda_1^\star$ autovalore di A.

   Il determinante di (sI-A) è un polinomio di ordine n, che si può scrivere nella forma:

$$(s-\lambda_1)^{n_1} \cdots (s-\lambda_g)^{n_m} \qquad \text{dove} \qquad \sum_j^m (n_j) = n.$$

   Riprendendo la matrice di trasferimento di un qualsiasi sistema MIMO (vedi 9.12) si noti che nel caso particolare di un sistema SISO, P(s) $= \frac{N(s)}{D(s)}$, dove i poli della funzione sono gli autovalori λ già considerati in precedenza; quindi, gli autovalori di A ci danno informazione sulla stabilità del sistema.
   Si consideri ora un sistema stabile ($\Re[\lambda_i(A)] < 0$) con $u(t) = 0$. Si ha che:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{x_l(t)} = e^{At}\mathbf{x(0)} = \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_i t^{m_i} e^{\lambda_i t}$$

   Poichè gli autovalori sono negativi, $e^{\lambda_i t} \to 0$ per $t \to \infty$, è chiaro quindi che anche l'uscita $y =$ A$\mathbf{x}$ tende a 0 per $t \to \infty$.

[2] si ricorda che il sistema ha p ingressi e l uscite

6. Raggiungibilità e Osservabilità

   - **Raggiungibilità**
     La proprietà di Raggiungibilità (che nel caso continuo è equivalente alla proprietà di controllabilità), significa che si riesce sempre a trovare un ingresso $u(t)$, con $t \in [0, T]$, che sposta $\mathbf{x(0)}$ in $\mathbf{x(T)} \in \mathbb{R}^n$. Esistono due metodi per verificare questà proprietà:

     * Definito $W = [B, AB, \ldots, A^n B] \in \mathbb{R}^{n \times (np)}$, perchè il sistema sia raggiungibile W deve avere rango $= n$; nel caso SISO $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e la suddetta proprietà implica che $\exists\ W^{-1}$, cioè che $det(W) \neq 0$.

     * Test PBH
       Definita $H = [sI - A|B] \in \mathbb{C}^{n \times (np)}$ la raggiungibilità implica che H abbia rango $= n$ $\forall s \in \mathbb{C}$, in particolare la matrice H ha certamente rango $= n$ per $s \neq \lambda(A)$ e quindi si deve controllare che rango H $= n$ solo per $s = \lambda(A)$.

   - **Osservabilità**
     La proprietà di osservabilità significa che conoscendo $y(t)$ e $u(t)$ per $t \in [0, T]$ si riesce a determinare $\mathbf{x}(0)$ e, quindi, applicando le equazioni di aggiornamento di stato, si può determinare qualsiasi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. I metodi per verificare l'osservabilità di un sistema sono del tutto identici a quelli visti per la raggiungibilità, basta applicare le regole sopra riportate al sistema duale:

$$A \leftarrow A^T \tag{9.14}$$
$$B \leftarrow C^T \tag{9.15}$$

7. Dato un sistema scritto in spazio di stato, se la coppia (A,B) è controllabile $\Longrightarrow \exists$ un controllore che stabilizza il sistema (con arbitraria velocità).
   Se la coppia (A,C) è osservabile $\Longrightarrow \exists$ uno stimatore asintotico dello stato (anche qui con arbitraria velocità).

8. Zeri di trasferimento
   Sia $z \in \mathbb{C}$; z è detto *Zero di Trasferimento* per il sistema (A,B,C,D) se, considerata la matrice:

$$Z = \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+l)\text{x}(n+p)}$$

   si ha che:

$$rango\ Z < \overline{n} = \min(n + p, n + l) \tag{9.16}$$

   Nel caso di sistemi SISO, la matrice Z è quadrata di ordine n e la condizione (9.16) è equivalente a porre:

$$det \begin{bmatrix} zI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix} = 0.$$

9. Ingressi costanti per sistemi strettamente stabili
   Si consideri un sistema (A,B,C,D) strettamente stabile.

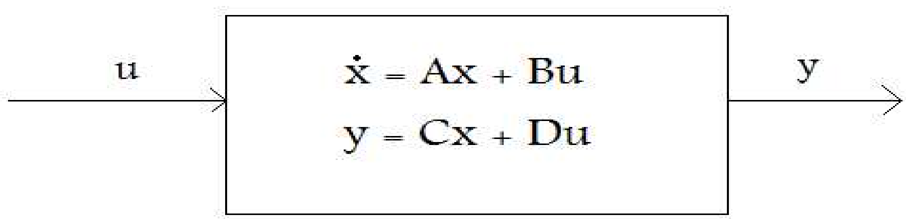

Figura 9.1. Modello Ingresso-Uscita di un sistema

Per il suddetto sistema vale quindi che:

$$\forall \lambda \in \lambda(A) : \Re(\lambda) < 0 \tag{9.17}$$

dove si è indicato con $\lambda(A)$ lo spettro di A, cioè l'insieme dei suoi autovalori.
Si supponga ora di applicare all'ingresso del sistema un segnale costante $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{cost}$.
Dalla definizione di stabilità asintotica segue che:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_l(t) & \rightarrow & 0, \quad \forall \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(t) & \rightarrow & \mathbf{x}_{DC} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}(t) \; \rightarrow \; \mathbf{y}_{DC} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Dalle precedenti equazioni si ottiene:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{0} & = & A\mathbf{x}_{DC} \; + \; B\mathbf{u}_{DC} \\ \mathbf{y}_{DC} & = & C\mathbf{x}_{DC} \; + \; D\mathbf{u}_{DC} \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{x}_{DC} & = & -A^{-1}B\mathbf{u}_{DC} \\ \mathbf{y}_{DC} & = & (-CA^{-1}B + D)\mathbf{u}_{DC} \end{array}$$

Se, dunque, l'ingresso di un sistema strettamente stabile è costante, anche l'uscita a regime lo sarà.
Il valore dell'uscita a regime può anche essere calcolato utilizzando la FDT $P(s)$ del sistema; infatti, ricordando che la risposta di un sistema strettamente stabile ad un ingresso unitario vale a regime $y_{reg} = P(0)$, si ha che:

$$\mathbf{y}_{DC} \; = \; P(0)\mathbf{u}_{DC} \tag{9.18}$$

9.1.4 Criteri di progettazione in spazio di stato

La progettazione in spazio di stato si riconduce in genere al problema di allocazione degli autovalori del sistema in catena chiusa.
Si consideri il seguente schema a blocchi, dove sono messi in evidenza il processo ed il controllore scritti in forma di spazio di stato.

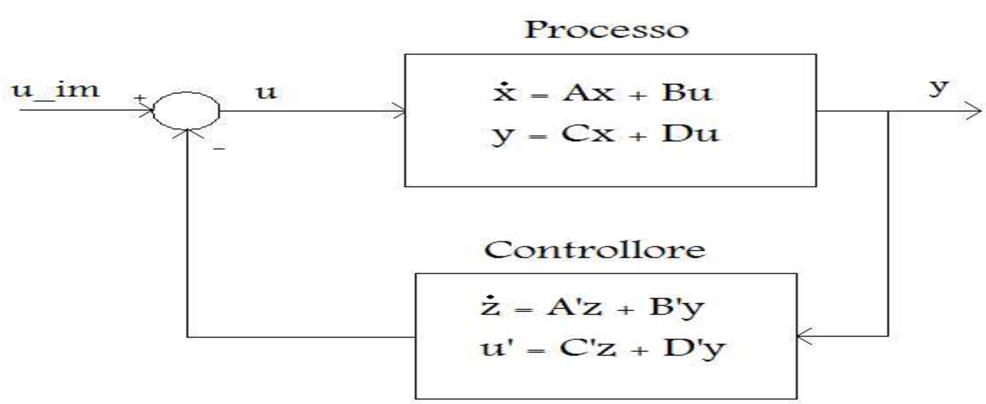

Figura 9.2. Schema a blocchi di un sistema di controllo a retroazione

Il sistema sopra è equivalente al seguente:

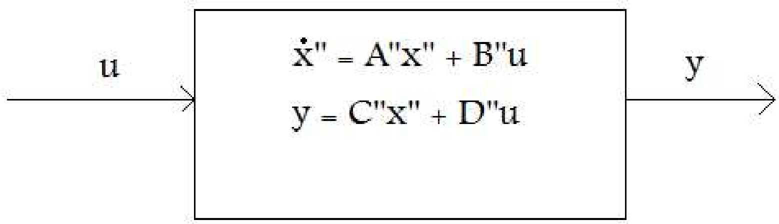

Figura 9.3. Sistema equivalente al sistema di Fig. 9.2

Le tecniche adottabili nella progettazione del controllore sono due:

- Retroazione statica dallo stato
- Retroazione dinamica o di uscita

- **Retroazione statica dallo stato**
  La retroazione statica dallo stato avviene secondo quanto indicato nel seguente schema a blocchi:

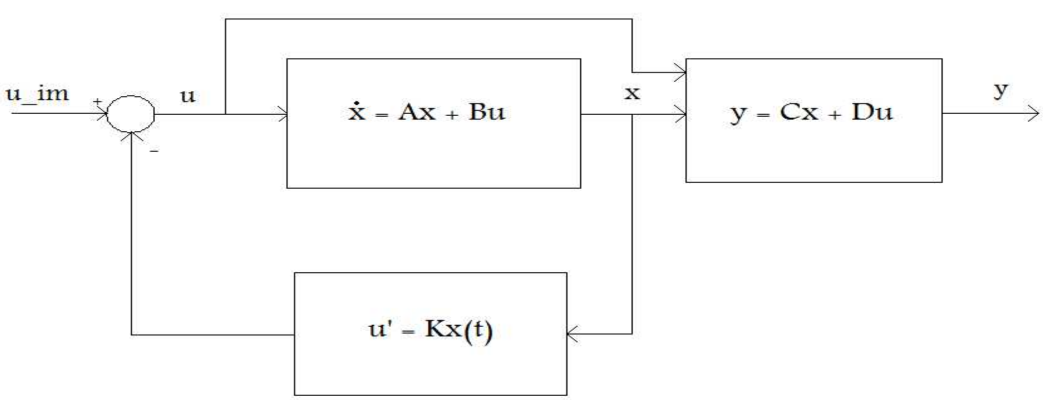

Figura 9.4. Sistema di controllo con retroazione statica dallo stato

Nel caso in cui il sistema trattato sia SISO, considerata la FDT ad anello chiuso:

$$P_{cc}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B + D$$

si dovranno allocare gli autovalori della matrice A-BK, con $K \in \mathbb{R}^{pxn}$ matrice di retroazione dallo stato.

- **Retroazione dinamica o di uscita**

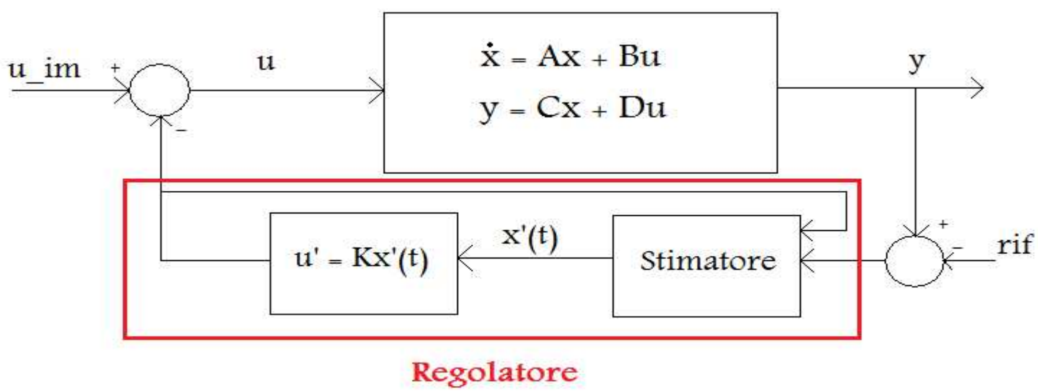

Figura 9.5. Sistema di controllo con retroazione dinamica

Tale retroazione si utilizzerà quando non si ha accesso allo stato del sistema.