

Lezione 13 — Maggio 19

Docente: Luca Schenato

Stesori: S.Ciavarella, S.Ciliberti, F.Guarato

13.1 Sistemi olonomi e anolonomi: rappresentazioni ed esempi

Abbiamo parlato di sistemi olonomi come sistemi nei quali lo stato $q \in \mathbb{R}^n$ é vincolato a rimanere su una ipersuperficie S , tale che

$$\dim(S) = k < n \quad (13.1)$$

definendo S come

$$S \triangleq \{q \in \mathbb{R}^n : h_i(q) = 0, \ i = 1, \dots, k\} \quad (13.2)$$

in cui $h_i(q)$ sono funzioni che definiscono S in maniera implicita. Questo é un modo **globale** di definire un sistema olonomo. Infatti esso può essere anche descritto tramite vincoli **locali** sulle velocità, vale a dire

$$a_i^T(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad (13.3)$$

tali vincoli infatti dicono in quali direzioni il sistema si può spostare a partire dal punto q . In un sistema olonomo i vincoli locali implicano quelli globali.

Un sistema **anolonomo**, invece, ha dei vincoli locali sulle velocità, del tipo:

$$a_i^T(q) \cdot \dot{q} = 0, \ i = 1, \dots, k \quad (13.4)$$

che globalmente non generano vincoli sullo stato $q \in \mathbb{R}^n$. Equivalentemente questo si può esprimere dicendo che a partire dal punto q_0 il sistema si può portare in qualsiasi altro punto $q \neq q_0$ dato che il vincolo locale é solo su alcune direzioni.

In base a quanto detto, se un sistema é olonomo si può restringerne lo stato e riscrivere la dinamica del sistema per il nuovo stato che rappresenta dunque il comportamento del sistema solo sulla ipersuperficie S .

Esiste un modo alternativo per descrivere un sistema soggetto a vincoli locali sulle posizioni, sia che si tratti di un sistema olonomo o anolonomo. In pratica, invece di rappresentare il sistema tramite i vincoli, cioè le direzioni lungo le quali non é possibile muoversi, possiamo riscrivere il sistema tramite le direzioni lungo le quali di può muovere. Si ottengono così equazioni del moto che contengono al proprio interno anche i vincoli.

$$\dot{q} = g_1 u_1 + \dots + g_m u_m \quad (13.5)$$

In genere interessa sapere se un sistema é olonomo o anolonomo. Tale problema si può tradurre in termini di raggiungibilità o meno del sistema. A partire dai vincoli sul sistema

$$a_i \quad i = 1, \dots, k \quad (13.6)$$

definendo

$$A(q) = [a_1 \dots a_n] \in \mathbb{R}^{n \times k} \quad (13.7)$$

si passa al sistema di controllo equivalente

$$\dot{q} = g_1 u_1 + \dots + g_m u_m \quad (13.8)$$

definendo

$$G(q) = [g_1 \dots g_m] \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (13.9)$$

La matrice G é tale per cui $A^T(q) \cdot G(q) = 0$ e $\text{rank}([G \cdot A]) = n$.

A questo punto ci poniamo le domande:

1. Data $G(q)$ il sistema ad essa associato é olonomo , parzialmente anolonomo o completamente anolonomo?
2. Se il sistema rappresentato da $G(q)$ é completamente anolonomo, dati due stati q_0 e q_f quali sono gli ingressi $u(\cdot)$ che permettono al sistema di portarsi da q_0 a q_f ?

Vediamo quanto detto finora in un esempio.

ESEMPIO: Cinematica dell' automobile

Consideriamo il modello cinematico per un automobile rappresentato in Fig. 13.1 e definito dallo stato $q = [x \ y \ \theta \ \phi]^T$. Indichiamo con (x, y) la posizione al centro delle due ruote posteriori e con (x_f, y_f) la posizione al centro delle due ruote anteriori, θ l'angolo dell'asse longitudinale dell'auto rispetto ad un sistema di riferimento fisso e ϕ l'angolo di sterzata delle ruote anteriori. In questo modello ci sono due vincoli di non slittamento: uno per le ruote anteriori ed uno per le ruote posteriori. Quest'ultimo vincolo si traduce in

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \tan \theta \quad (13.10)$$

che fornisce il **primo vincolo**

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (13.11)$$

inoltre, dati

$$x_f = x + l \cdot \cos \theta \quad (13.12)$$

$$y_f = y + l \cdot \sin \theta \quad (13.13)$$

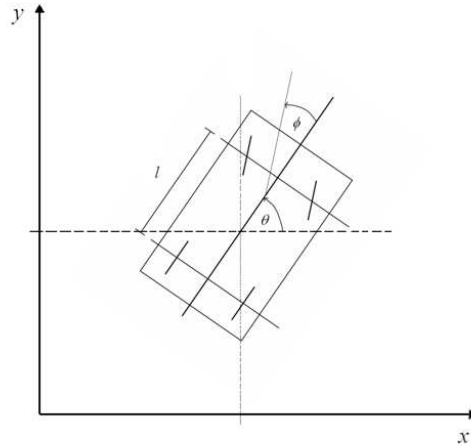


Figura 13.1. Schematizzazione dell'automobile

derivando si ottiene

$$\dot{x}_f = \dot{x} - l\dot{\theta} \sin \theta \quad (13.14)$$

$$\dot{y}_f = \dot{y} + l\dot{\theta} \cos \theta \quad (13.15)$$

che forniscono

$$\dot{x}_f \sin(\theta + \phi) - \dot{y}_f \cos(\theta + \phi) = 0 \quad (13.16)$$

da cui, sostituendo le espressioni di \dot{x}_f e \dot{y}_f , si ottiene il **secondo vincolo**:

$$\dot{x} \sin(\theta + \phi) - \dot{y} \cos(\theta + \phi) - \dot{\theta} l \cos \phi = 0 \quad (13.17)$$

La matrice $A^T(q)$ si scrive

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \\ \sin(\theta + \phi) & -\cos(\theta + \phi) & -l \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = 0 \quad (13.18)$$

A questo punto si può scegliere fra controllo a trazione anteriore e controllo a trazione posteriore.

- Sistema di controllo con **trazione anteriore**. In questo caso la matrice $G(q)$ risulta:

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \frac{1}{l} \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.19)$$

- Sistema di controllo con **trazione posteriore**. In questo caso la matrice $G(q)$ risulta:

$$G(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \frac{1}{l} \tan \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.20)$$

In maniera esplicita, volendo un controllo a trazione posteriore, si ottengono le equazioni del moto:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \frac{1}{l} \tan \phi \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (13.21)$$

le quali mettono in evidenza come l'ingresso di controllo u_1 , corrispondente alla velocità delle ruote posteriori, modifica la dinamica delle componenti x , y e θ del vettore di stato q , mentre u_2 , corrispondente alla velocità angolare dello sterzo, permette di modificare l'angolo di sterzo ϕ .

Sebbene il sistema sia ora rappresentato ora in un modo tale da poterne analizzare l'olonomia/anolonomia, come verrà mostrato in seguito, tuttavia non è facile progettare controlli in grado di portare il sistema da una configurazione q_0 ad uno q_f . A tale scopo verrà mostrato che tramite un opportuno cambio di variabili, il sistema di controllo originale può essere scritto come un sistema anolonomo in catena, del quale si conoscono una serie di algoritmi per la progettazione di traiettorie. In particolare mostreremo che esistono delle trasformazioni invertibili del tipo:

$$z = f_1(q) \quad (13.22)$$

$$v = f_2(q, u) \quad (13.23)$$

dove $z \in \mathbb{R}^n$ e $u = (u_1, \dots, u_m)$ e $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$. Grazie a questa trasformazione è più semplice calcolare gli ingressi che permettono di portare il sistema nello stato $z_f = f_1(q_f)$ nel tempo T a partire dallo stato $z_0 = f_1(q_0)$. In tal modo si ottengono gli ingressi $v_1(t), \dots, v_m(t)$. A questo punto tramite la funzione inversa di f_2 si ricavano gli ingressi $u_1(t), \dots, u_m(t)$. Esplicitando le formule si può scrivere

$$\dot{z} = \tilde{g}_1(z)v_1 + \dots + \tilde{g}_m(z)v_m \quad (13.24)$$

che è l'espressione di un sistema anolonomo a catena.

13.2 Raggiungibilità ed altre definizioni per sistemi di controllo nonlineari

Definizione 13.1. *Il sistema di controllo nonlineare*

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad (13.25)$$

si dice **controllabile** (raggiungibile) se, dati $q_0, q_f \in \mathbb{R}^n$, esiste $T \geq 0$, esiste $u(\cdot) : [0, T] \rightarrow U$ tali che $q(0) = q_0$ e $q(T) = q_f$.

Definizione 13.2. Dato un insieme aperto $V \subset \mathbb{R}^n$ e $T > 0$ si definisce

$$R^V(q_0, T) = \{q : \exists u : [0, T] \rightarrow U, q(0) = q_0, q(T) = q_f, q(t) \in V, \forall t \in [0, T]\} \quad (13.26)$$

Definizione 13.3. Si definisce

$$R_T^V(q_0) = \bigcup_{0 \leq \tau \leq T} R^V(q_0, \tau) \quad (13.27)$$

Definizione 13.4. Si dice che il sistema

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad (13.28)$$

è **Small Time Locally Controllable** (STLC) se per ogni V intorno di q_0 , esiste T tale che $R_T^V(q)$ è intorno di q_0 .

Definizione 13.5. Si dice che il sistema

$$\dot{q} = f(q, u), \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad (13.29)$$

è **localmente accessibile** (LA) se per ogni V intorno di q_0 , esiste T tale che $R_T^V(q_0) \supset \Omega$, dove Ω è un insieme aperto.

Proposizione 13.1.

$$STLC \Rightarrow Controllabile \Rightarrow LocalmenteAccessibile(LA) \quad (13.30)$$

Nel caso particolare in cui il sistema è senza drift,

$$STLC \Leftrightarrow Controllabile \Leftrightarrow LocalmenteAccessibile(LA) \quad (13.31)$$

A questo punto andiamo ad analizzare sistemi di questo tipo (senza drift).

13.3 Sistemi senza drift e parentesi di Lie

Consideriamo un sistema generico senza drift

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m \quad (13.32)$$

E' ovvio che localmente e' possibile muoversi lungo le direzioni date dai vettori $g_i(q)$. La domanda che ci poniamo e' se utilizzando degli ingressi opportuni e' possibile muoverci *localmente* anche in direzioni che non sono nello spazio generato dai vettori $[g_1(q), \dots, g_m(q)]$. A tal scopo utilizzeremo una combinazione di ingressi che nel tempo hanno l'andamento

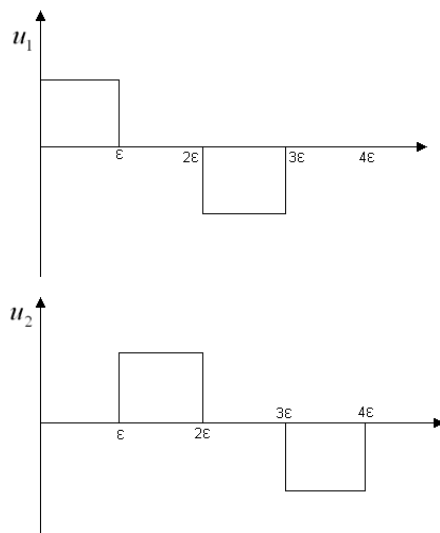


Figura 13.2. Andamento degli ingressi nel tempo

in figura per un intervallo temporale molto piccolo e poi faremo tendere questo intervallo temporale a zero per analizzarne il comportamento locale.

Definiamo

$$\Phi_t^g(q_0) \doteq q_0 + \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (13.33)$$

che corrisponde all'evoluzione del sistema partendo dallo stato q_0 e muovendoci lungo il flusso vettoriale $g(q)$ per un intervallo di lunghezza t .

Facciamo lo sviluppo in serie di Taylor arrestata al secondo ordine dell'operatore appena definito per un punto generico \bar{q} :

$$\Phi_\epsilon^g(\bar{q}) = \bar{q} + \epsilon g(\bar{q}) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial g}{\partial q}(\bar{q}) g(\bar{q}) + o(\epsilon^2) \quad (13.34)$$

sostituendo $\bar{q} = q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2$ nell'espressione di Φ_ϵ^g si ottiene

$$\Phi_\epsilon^g(q_0 + \epsilon q_1 + \epsilon^2 q_2) = q_0 + \epsilon(q_1 + g(q_0)) + \epsilon^2(q_2 + \frac{\partial g}{\partial q} q_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial q} g(q_0)) + o(\epsilon^2) \quad (13.35)$$

Si ha che in tal caso il modo compatto per indicare lo stato in cui il sistema si porta se gli si applicano gli ingressi u_1 e u_2 cioè

$$q(4\epsilon) = \Phi_\epsilon^{-g_2} \circ \Phi_\epsilon^{-g_1} \circ \Phi_\epsilon^{g_2} \circ \Phi_\epsilon^{g_1}(q_0) \quad (13.36)$$

dove dopo alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$q(4\epsilon) = q_0 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial q}(g_1(q_0)) - \frac{\partial g_1}{\partial q}(g_2(q_0)) \right) \quad (13.37)$$

nella quale si definisce il nuovo vettore $g_{12}(q_0)$ tramite le parentesi di Lie

$$g_{12} \doteq [g_1, g_2](q_0) = \frac{\partial g_2}{\partial q}(g_1(q_0)) - \frac{\partial g_1}{\partial q}(g_2(q_0)) \quad (13.38)$$

Osservando questa espressione si può concludere che se

$$\begin{aligned} g_1(q) &= g_1 = \text{cost} \\ g_2(q) &= g_2 = \text{cost} \end{aligned} \quad (13.39)$$

allora $g_{12} = 0$ e quindi la scelta degli ingressi precedenti fa sì che lo stato q si sposti lungo il piano generato dai vettori g_1 e g_2 , e ritorni nello stesso punto di partenza. Se invece $g_{12} \notin \text{span}[g_1, g_2]$, il vettore g_{12} non giace sul piano di g_1 e di g_2 e mette in evidenza come, applicando solo i due ingressi u_1 e u_2 , risulti una terza componente del movimento del sistema nello spazio generato dai vettori $[g_1, g_2, g_{12}]$. In questo caso pur avendo due soli ingressi, il sistema alla fine si può muovere, localmente in uno spazio di dimensione maggiore di 2. In pratica si può affermare che

- Il sistema si può muovere lungo g_1, \dots, g_m
- Il sistema si può muovere lungo $[g_i, g_j]$, $i, j = 0, \dots, m$ se si applicano gli ingressi descritti sopra che assomigliano molto a delle sinusoidi sfasate di 90° tra di loro: $u_i(t) \cong \sin(\frac{t}{T}2\pi)$ $u_j(t) \cong \cos(\frac{t}{T}2\pi)$. Infatti, come vedremo più avanti con i sistemi in catena, l'uso di sinusoidi di fase e frequenza diversa sono ingressi tipici per cercare di spostare lo stato q di un sistema completamente autonomo da una configurazione ad un'altra.
- E' possibile creare degli ingressi opportuni che mi permettono di muovermi localmente lungo qualsiasi direzione ottenibile tramite parentesi di Lie, cioè $[g_i, g_j]$ e composizione di parentesi di Lie, cioè $[[g_i, g_j], g_k]$, $[[[g_i, g_j], g_k], g_h]$ etc... Quindi la controllabilità locale può essere dedotta direttamente dall'analisi dei vettori g_i e loro parentesi di Lie.
- Informalmente parlando, maggiore è il numero di parentesi di Lie che servono per ottenere un nuovo vettore che non appartiene allo spazio generato da quelle precedenti, e più difficile è spostare lo stato da un punto all'altro. Ovviamente il termine difficile è lasciato volutamente vago. Quello che spesso succede è che lo stato $q(t)$ deve fare un percorso ampio per raggiungere lo stato desiderato finale, sebbene q^0 e q^f siano vicini tra di loro. Si pensi per esempio al caso del parcheggio di un'auto: per spostarci lateralmente anche di poco è necessario muoversi prima in avanti e sterzare in un senso, e poi muoversi all'indietro e sterzare nel verso opposto.