Lezione 14 — Maggio 24

Docente: Luca Schenato *Stesori: Ciavarella Ciliberti Guarato Biancat Dal Maschio Seno*

14.1 Sistemi involutivi e sistemi olonomi

$$\begin{aligned} \Delta_0(q) &= span\{g_1(q), ..., g_m(q)\} &(14.1)\\ \Delta_{i+1}(q) &= \Delta_i(q) \cup span\{[g_j, v]\}, v \in \Delta_i(q), j = 1, ...m &(14.2)\\ \Delta_{i+1} &\supseteq \Delta_i &(14.3) \end{aligned}$$

Se si ha che

$$\Delta_{i+1} = \Delta_i \Rightarrow \Delta_{i+2} = \Delta_i = \overline{\Delta}(q) \tag{14.4}$$

dove $\overline{\Delta}(q)$ e' definita **chiusura involutiva** di $g_1, ...g_m$.

Definizione 14.1. *$\Delta_0(q)$ si dice involutivo se $\bar{\Delta} = \Delta_0$, cioé tutte le possibili parentesi di Lie $[g_i, g_j](q)$ appartengono allo spazio generato dai soli vettori $g_i(q)$ e quindi localmente e' confinato a muoversi in uno spazio di dimensione m.*

Definizione 14.2. *$\Delta(q)$ si dice regolare se il rango é costante per ogni q.*

Teorema 14.1. *Se $\Delta_0(q)$ é regolare e involutivo allora il sistema è olonomo.*

Teorema 14.2. *Il sistema*

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \ldots + g_m(q)u_m \tag{14.5}$$

é localmente controllabile in q se $\bar{\Delta}(q) = \mathbb{R}^n$.

Si considerino due sistemi che sono giá stati studiati: uno olonomo e l'altro completamente anolonomo per verificare le proprietá enunciate nei precedenti due teoremi.

Esempio 1
Si consideri il sistema olonomo cosí definito

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

che equivale al vincolo

$$h(q) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

dove

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

che significa che tutti i punti sono vincolati a rimanere sulla superficie di una sfera di raggio unitario. Si calcoli il vincolo sulle velocitá ottenendo

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$$

ossia $a^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ infatti $a^T\dot{q} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = 0$. Il vettore a rappresenta la direzione lungo la quale non ci si puó muovere, risulta piú conveniente calcolare le direzioni g_i lungo le quali ci si puó muovere ossia $g_1(q)$ e $g_2(q)$ tali che

$$a^T g_1(q) = 0$$

$$a^T g_2(q) = 0$$

$$\text{span}\,\{a, g_1, g_2\} = \mathbb{R}^3$$

Si puó facilmente verificare che

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} = 0$$

e

$$\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3 \quad \forall x, y, z \neq 0^1$$

Quindi $g_1 = \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}$ e $g_2 = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}$.

[1] In realtá basterebbe la condizione $q \neq 0$, ma in questo caso bisognerebbe sciegliere due vettori perpendicolari g_1 e g_2 in maniera diversa in base al valore che assume q. Si tratta comunque di un problema tecnico di scelta di basi.

Calcoliamo quindi la parentesi di Lie

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2] &= \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2 && (14.6)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} && (14.7)\\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{bmatrix} = g_{12} \in \text{span}\{g_1, g_2\} && (14.8)
\end{aligned}$$

Ed é immediato osservare che $a^T g_{12} = 0$ cioé che $g_{12} \perp a$ e di conseguenza $a \in \text{span}\{g_1, g_2\}$. Qunidi abbiamo trovato che $\triangle_0 = \triangle_1 = \overline{\triangle}$ che ci permette di concludere, per il teorema di Frobenius, che il sistema é olonomo (cosa che sapevamo giá).

Esempio 2: L'uniciclo

Consideriamo ora un sistema che sappiamo essere anolonomo: l'uniciclo. Posto $q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}$ risulta

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} u_2 = g_1 u_1 + g_2 u_2$$

Calcoliamo ora la parentesi di Lie

$$\begin{aligned}
[g_1, g_2] &= \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2 && (14.9)\\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} && (14.10)\\
&= \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = g_{12} && (14.11)
\end{aligned}$$

Ci si chiede a questo punto se $g_{12} \in \text{span}\{g_1, g_2\}$. A tale scopo si costruisce la matrice

$$A = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ne calcoliamo il determinante

$$\det A = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

dunque il rango della matrice é massimo che significa che i tre vettori colonna che la costituiscono sono linearmente indipendenti e si puó concludere che $\triangle_0 \subset \triangle_1 = \bar{\triangle} = \mathbb{R}^3$ che permette di concludere, per il teorema di Choe, che il sistema considerato é completamente anolonomo.

14.2 Sistemi a catena

Consideriamo ora sistemi anolonomi detti 'a catena' a m ingressi (noi considereremo solo il caso m=2) che possono essere rappresentati nel seguente modo

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 \quad q \in \mathbb{R}^n$$

dove

$$g_1(q) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix} \quad g_2(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si puó far vedere che

- Il sistema é completamente anolonomo (STLC);
- Ci si puó spostare da un punto generico q^0 ad un altro q^f nel seguente modo:
  1. Si spostano prima le prime due componenti nella posizione finale (banale) $q_1^0, q_2^0 \rightarrow q_1^f, q_2^f$;
  2. per ogni $q_{k+2}, \quad k \geq 1$ si sposta $q_k^0 \rightarrow q_k^f$ utilizzando come ingressi

     $$u_1 = a \sin(2\pi t) \quad u_2 = b \cos(2\pi k t)$$

     dove a e b devono soddisfare la seguente condizione

     $$q_{k+2}^f - q_{k+2}^0 = \left(\frac{a}{4\pi}\right)^k \frac{b}{k!}$$

  Dunque prima si spostano una alla volta le prime due componenti e successivamente si spostano ad una ad una le altre. Nel far questo, per ogni k dell'algoritmo, tutte le componenti q_i, con $i = 1, \ldots, k+1$ si spostano, ma alla fine all'istante $t = 1$ ritornano dove le avevamo piazzate in precedenza. Le componenti q_i, con $i = k+3, \ldots, n$, invece non ritornano al punto di partenza, ed é per questo motivo che si procede spostando le componenti partendo da quelle con l'indice piu' basso.