

Lezione 16 — Maggio 31

Docente: Luca Schenato

Stesori: A. Soliman, F. Viola, D. Zilio

16.1 Coordinazione e consenso

16.1.1 Considerazioni preliminari sul controllo coordinato nei problemi di *Rendez-vous*

Nei controlli tradizionali generalmente si desidera stabilizzare il sistema e pilotarne lo stato in una precisa configurazione precedentemente stabilita¹.

Nel caso di controllo coordinato per i problemi di *Rendez-vous* non sussiste invece la necessità di portare lo stato ad una unica configurazione, bensì ad assumere un qualsiasi elemento appartenente ad una classe di configurazioni equivalenti. Tale impostazione del problema comporta un controllo che stabilizza in modo semplice e non asintotico lo stato del sistema intorno al punto di lavoro. In questa lezione si introduce una condizione sufficiente per l'esistenza del controllore per questo tipo di problematica.

16.1.2 Modello del Veicolo

Si immagini di voler pilotare in modo coordinato un insieme di N veicoli giacenti su un piano. Innanzitutto si definisce il modello in forma di stato dell' i -esimo veicolo come un vettore monodimensionale z_i , $i = 1, \dots, N$ a valori complessi: alla componente reale e a quella immaginaria vengano associate rispettivamente la prima e la seconda coordinata cartesiana. Anche se solitamente in questo tipo di applicazioni i veicoli necessitano di modelli complessi², la dinamica in questo frangente viene semplificata per agevolare la trattazione del problema di controllo. Nello specifico verrà adottato un modello a singolo integratore a tempo discreto con ingressi complessi:

$$z_i(t+1) = z_i(t) + u_i(t) \quad (16.1)$$

dove $u_i(t)$ è il vettore monodimensionale a valore complessi degli ingressi all'istante t .

Viene quindi ridefinita la dinamica dello stato del sistema composto di N veicoli, generando il vettore di stato

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix}$$

¹Si consideri per esempio il problema della regolazione delle uscite del sistema ad un dato *set point*.

²Ad esempio si trattano come *sistemi anolonomi*.

quello degli ingressi

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

e, adottato il formalismo

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t+1) &= \mathbf{z}^+ \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{z} \end{aligned} \tag{16.2}$$

ridefinendo la dinamica del sistema:

$$\mathbf{z}^+ = \mathbf{z} + \mathbf{u} \quad \mathbf{z}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^N \tag{16.3}$$

E' possibile dimostrare come il sistema ottenuto sia *raggiungibile*, *controllabile*³ e *dead-beat*.

16.1.3 Struttura di Informazione e Stato

Ogni veicolo del sistema agisce in modo autonomo generando in modo indipendente i propri ingressi di controllo; tuttavia tali ingressi non vengono generati retrazionando esclusivamente dallo stato del singolo sottosistema 'veicolo'. Si ricordi infatti che non esiste un *set point* e che quindi gli ingressi verranno calcolati sfruttando tutta l'informazione possibile sulla configurazione del sistema nel suo complesso. E' pertanto intrinseca nella formulazione del problema l'introduzione di 'vincoli' sulla effettiva possibilità di trasferire informazione tra i diversi *agenti*. In effetti è verosimile pensare che non sempre sia presente un ponte di comunicazione tra *tutti* i veicoli e che quindi sia necessario descrivere istante per istante come l'informazione relativa allo stato del sistema sia disponibile a tutti gli agenti. Si introduce per tanto il concetto di *struttura d'informazione*, che congiuntamente allo *stato* fornisce la descrizione completa della configurazione del sistema. La *struttura d'informazione*, aggiornata istante per istante, descrive *chi comunica con chi* dando quindi significato al concetto di retroazione dallo stato, che potrà infatti essere conosciuto completamente solo in presenza un canale di comunicazione che colleghi tutti gli *agenti*.

Viene pertanto costruito il grafo $G = (V, \mathcal{E})$, dove $V = \{1, \dots, N\}$ sono i vertici, corrispondenti agli agenti del sistema, e $\mathcal{E} = \{a_{ij} \mid i, j \in V\}$ sono gli archi non orientati che descrivono la connettività tra gli agenti del sistema. Sarà proprio sulla struttura di questo grafo che verranno fatte ipotesi per assicurare il successo della strategia di controllo. Si noti infatti come vi sia una stretta corrispondenza tra il struttura di G , ovvero tra gli elementi di $\mathcal{E}$ e la matrice di retroazione K che genera i segnali di controllo secondo la

$$\mathbf{u}(t) = K\mathbf{z}(t)$$

si osservi infatti che gli elementi K_{ij} posso essere non nulli se e solo se i rispettivi archi a_{ij} appartengono all'insieme $\mathcal{E}$.

³Il sistema si porta a 0 in un passo con $\mathbf{u} = -\mathbf{z}$

16.1.4 Definizione del Problema di Controllo

Sia assegnata la dinamica del sistema complessivo con retroazione dello stato:

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^+ &= \mathbf{z} + \mathbf{u} \\ &= (I + K)\mathbf{z} \\ &= P\mathbf{z}\end{aligned}\tag{16.4}$$

dove P sarà quindi la matrice di aggiornamento in un passo per il sistema controllato.

Il problema di controllo consisterà quindi, generato il grafo G di *struttura di informazione*, nel trovare una matrice K *compatibile con* G tale che per il sistema

$$\mathbf{z}^+ = P\mathbf{z}$$

valga la

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{z}(t) = \alpha \mathbf{1}\tag{16.5}$$

con

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

e α generico. Ci si pone quindi il problema della caratterizzazione della matrice P e del grafo G al fine di stabilire le condizioni per cui il problema di controllo ammette soluzione.

Si introduce innanzitutto una *condizione necessaria* su P affinché il problema sia risolubile. Tale condizione in sostanza esprime algebricamente il fatto che se gli agenti si trovano già in in una configurazione di *rendez-vous* essi non devono muoversi.

Assumiamo pertanto che lo stato iniziale del sistema sia:

$$\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \mathbf{1}$$

con α complesso qualsiasi⁴. Si osservi che per avere $\mathbf{z}(1)=\mathbf{z}(0)$, ovvero affinché $\mathbf{z}(0)$ sia punto di equilibrio semplicemente stabile, deve essere

$$P\alpha \mathbf{1} = \alpha \mathbf{1}\tag{16.6}$$

ovvero

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Quindi $\mathbf{1}$ deve essere autovettore di P con autovalore 1:

$$\begin{aligned}1 &\in \lambda(P) \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{1}\end{aligned}\tag{16.7}$$

⁴Si noti che esso è una configurazione di *rendez-vous*.

Ciò comporta chiaramente che il sistema controllato dovrà risultare *semplicemente stabile* e non *asintoticamente stabile* come solitamente richiesto nella pratica dei controlli tradizionali.

16.1.5 Il Teorema di Peròn-Frobenius

Si introduce ora una *condizione sufficiente* per la risolubilità del problema di controllo la cui base risiede nel teorema di Peròn-Frobenius, che verrà dimostrato nelle prossime lezioni.

Teorema 16.1. *Se $G(V, \mathcal{E})$ è fortemente connesso allora $\exists K$ compatibile con G tale che*

$$\begin{aligned} I + K &\geq \mathbf{0} \\ (I + K)\mathbf{1} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{z}(t) &\rightarrow \alpha \mathbf{1} \end{aligned}$$

La matrice K si intende compatibile con G se la matrice $P = (I + K)$ soddisfa la relazione

$$P_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow a_{ij} \in \mathcal{E}$$

Il teorema ha come obiettivo quello di dichiarare un insieme di matrici di retroazione e strutture di informazione che permettono di caratterizzare il comportamento della successione $\{P^k\}$, $k \in \mathbb{N}$ e quindi della traiettoria del sistema nello spazio di stato

$$\mathbf{z}(t) = P^t \mathbf{z}(0)$$

L'idea base è quella di richiedere che P sia una *matrice stocastica* e che il grafo sia *fortemente connesso*: ciò comporta che $\{P^k\}$, $k > 1$ sia una sotto-successione di matrici positive. Le matrici positive sono operatori lineari che agiscono sul piano complesso facendo contrarre il quadrante positivo in un sottoinsieme di misura nulla, permettendo quindi di confinare nello spazio di stato l'evoluzione del sistema. Verrà dimostrato che tali matrici hanno inoltre diverse proprietà strutturali che permettono di caratterizzare i modi del sistema retroazionato e le sue proprietà di convergenza a partire dalla sola analisi della matrice P . Verrà quindi dimostrato il basilare teorema di Peròn-Frobenius da cui è stata ricavata la condizione sufficiente ora enunciata.

Per le seguenti definizioni si considerino $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$.

Definizione 16.1. *Si definisce $A \geq B$ se $\forall i, j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ vale*

$$A_{ij} \geq B_{ij}$$

Definizione 16.2. *Analogamente alla Definizione 15.1 per le relazioni $\leq, >, <$.*

Definizione 16.3. *Si definisce $|A|$ la matrice i cui elementi sono i moduli degli elementi di A .*

$$|A|_{ij} = |A_{ij}| \quad \forall i, j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

Definizione 16.4. Si definiscono $\min A$ e $\max A$ rispettivamente

$$\begin{aligned}\min A &= \min_{i,j: 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} A_{ij} \\ \max A &= \max_{i,j: 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} A_{ij}\end{aligned}$$

Si ridefiniscono le norme che verranno in seguito utilizzate nelle dimostrazioni.

Definizione 16.5. Norma 1 per vettori

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

Definizione 16.6. Norma ∞ per vettori

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max |x_i|$$

Definizione 16.7. Norma 1 indotta per matrici

$$\|A\|_1 = \max_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1$$

Definizione 16.8. Norma ∞ indotta per matrici

$$\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty$$

Definizione 16.9. Raggio spettrale Assegnata una matrice positiva A si definisce raggio spettrale di A , indicato con $\rho(A)$, il maggiore dei moduli degli autovalori di A .

$$\rho(A) = \max |\lambda| \quad \lambda \in \lambda(A)$$

Lemma 16.1. Sulle norme indotte.

i) Sia a_{ij} l'elemento in posizione (i, j) di A matrice positiva. Vale:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| = \max(A \cdot \mathbf{1})$$

ii) Sia a_{ij} l'elemento in posizione (i, j) di A matrice positiva. Vale:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| = \max(\mathbf{1}^T \cdot A)$$

Dimostrazione: Si dimostra solo la *i)*, per la *ii)* si procede infatti analogamente.

$\geq$) Si prenda il vettore a norma 1 unitaria

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \text{sign}(a_{i1}) \\ \vdots \\ \text{sign}(a_{iN}) \end{pmatrix}$$

Si noti com'è costituito l'elemento i -esimo del vettore colonna generato dal prodotto $A\mathbf{x}$:

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_j a_{ij} \cdot x_j = \sum_j |a_{ij}|$$

Ne discende

$$\|A\|_\infty \geq \|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |(A\mathbf{x})_i| \geq \sum_j |a_{ij}| \quad \forall i$$

e quindi:

$$\|A\|_\infty \geq \sum_j |a_{ij}|$$

$\leq$) Si prenda un vettore $\mathbf{x}$ a norma ∞ unitaria. Ricordando che $|x_j| \leq 1$, valgono le relazioni:

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_i |(A\mathbf{x})_i| = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \cdot |x_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \quad \forall i$$

□

Teorema 16.2. Sulla relazione tra raggio spettrale e norma di una matrice. Sia A una matrice positiva, allora

$$i) \quad \rho(A) \leq \|A\|$$

$$ii) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{1/k} = \rho(A)$$

Dimostrazione: $i)$ Sia $\mathbf{v}$ autovettore di A a norma unitaria con autovalore λ , allora:

$$\|A\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\| \geq \|A\mathbf{v}\| \geq |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\| = |\lambda|$$

$ii)$ Si dimostra l'uguaglianza in due passi. A partire da $i)$, applicata alla matrice positiva A^k e dal legame tra gli autovalori delle matrici A e A^k , che comporta

$$\rho(A^k) = [\rho(A)]^k$$

risulta evidente la relazione:

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$$

Si dimostra ora $\rho(A) \geq \|A^k\|^{1/k}$. Si costruisca $\forall \epsilon > 0$ la matrice B definita come

$$B = \frac{1}{\rho(A) + \epsilon} \cdot A$$

Chiaramente il raggio spettrale di B è minore dell'unità e pertanto la successione $\{B^k\}$ tende a $\mathbf{0}$ in tutte le topologie. Ovvero $\exists \bar{k} : \|B^k\| \leq 1 \quad \forall k \geq \bar{k}$.

Pertanto $\forall \epsilon$ è *definitivamente* vera:

$$\|A^k\| \leq (\rho(A) + \epsilon)^k$$

ovvero la

$$\|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$$

da cui

$$\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k} \leq \rho(A) + \epsilon$$

e quindi la tesi. □

Lemma 16.2. *Sul raggio spettrale.*

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\rho(A) \leq \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Lemma 16.3.

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

$$\rho(A) \leq \|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

Ne consegue che, considerando $A \geq 0$ non negativa, se

i) $\mathbf{1}^T A = \delta \mathbf{1}^T$, la somma delle colonne è costante

ii) $A \mathbf{1} = \delta \mathbf{1}$, la somma delle righe è costante.

allora

i) $\rho(A) = \|A\|_1$

ii) $\rho(A) = \|A\|_\infty$

Dimostrazione: Si conosce $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$. Si suppone che A abbia la somma delle righe costante e denotiamo la costante con δ ; cioè $\delta = \|A\|_\infty$. Allora $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa $Ae = \delta e$. Segue che $\delta \leq \rho(A)$, da qui $\|A\|_\infty \leq \rho(A)$. Per la somma delle colonne, applichiamo lo stesso metodo a A^T .

□

Lemma 16.4. Se $0 \leq A \leq B$, allora $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Dimostrazione: Si dimostra che $0 \leq A \leq B$

$$\implies 0 \leq A^2 \leq B^2$$

$$\implies 0 \leq A^k \leq B^k$$

$$\implies \|A^k\|_1 \leq \|B^k\|_1$$

$$\implies \|A^k\|_1^{1/k} \leq \|B^k\|_1^{1/k}$$

$$\implies \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|_1^{1/k} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \|B^k\|_1^{1/k}$$

$$\implies \rho(A) \leq \rho(B).$$

□