PSC: Progettazione di sistemi di controllo	III Trim. 2006

Lezione 17 — Giugno 1

Docente: Luca Schenato *Stesore:* *Enrico Bandinu, Mattia Bruschetta, Carlo Macchion, Enrico Magon, Luca Parolini, Michele Nicetto*

Si prosegue nella dimostrazione del

Teorema 17.1. (***Teorema di Frobenius***) *Data $A > 0$ si ha che:*

1. $\exists\ v > 0$ *tale che* $Av = \rho(A)v$
2. $\forall\ \lambda \in \lambda(A)$, $\lambda \neq \rho(A) \Rightarrow |\lambda| < \rho(A)$
3. $\rho(A)$ *ha molteplicitá algebrica 1.*

Dalla precedente lezione sono note le seguenti affermazioni:

1. $||A||_\infty = max|A|\mathbb{1}$ e $||A||_1 = \mathbb{1}^T max|A|$
2. $\lim_{k\to\infty} ||A^k||^{1/k} = \rho(A) \leq ||A||$ valido per qualsiasi norma
3. dato $A \geq 0$ si ha che $\mathbb{1}^T A = \rho(A)1^T \Rightarrow \rho(A) = ||A||_1$ e $A\mathbb{1} = \rho(A)1 \Rightarrow \rho(A) = ||A||_\infty$
4. presi $0 \leq A \leq B \Rightarrow \rho(A) \leq \rho(B)$
5. dato $A \geq 0$ valgono $min\{A\mathbb{1}\} \leq \rho(A) \leq max\{A\mathbb{1}\}$ e $min\{\mathbb{1}^T A\} \leq \rho(A) \leq max\{\mathbb{1}^T A\}$, dove entrambe le prime disuguaglianze sono da verificare

***Dimostrazione*:** Sia

$$A\mathbb{1} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_N \end{bmatrix}$$ con $\delta_i \geq 0$ in quanto $A \geq 0$, e fissato $\delta = min\{\delta_i\}$ si verificano due casi:

$\delta = 0$ ovvio, in quanto $\rho(A) > 0$

$\delta > 0$ si costruisce allora la matrice

$$D = \begin{bmatrix} \delta/\delta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta/\delta_N \end{bmatrix} \leq I$$

che comporta $0 \leq AD \leq A \Rightarrow \rho(DA) \leq \rho(A)$

$$DA\mathbb{1} = D \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ \vdots \\ \delta \end{bmatrix}$$

e sfruttando l'*affermazione 3* si ottiene che

$$\rho(DA) = ||DA||_\infty = max\{|DA|1\} = \delta$$

Si ha, perciò che

$$\rho(DA) \leq \rho(A) \Rightarrow \delta \leq \rho(A).$$

$\square$

Teorema 17.2. *Se $A > 0$ allora esiste $x > 0$ tale che $Ax = \rho(A)x$.*

***Dimostrazione*:** $\rho(A)$ è autovalore di A, quindi esiste un x tale per cui $Ax = \lambda x$ con $|\lambda| = \rho(A)$.
Si vuole allora dimostrare che $A|x| = |\lambda||x|$; infatti

$$\rho(A)|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|$$

bisogna perciò validare la maggiorazione con un'ugualianza, cioè dimostrare che

$$|\sum a_{ij}x_j| = \sum |a_{ij}||x_j|.$$

Si definisce a questo proposito $Y = A|x| - \rho(A)|x| \geq 0$. Si osservi che quanto si vuole dimostrare, coincide con dimostrare la nullità del vettore Y. Posto:

$$z = A|x| > 0,$$

si costruisce dunque la matrice

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_N \end{bmatrix}$$

ottenendo

$$0 \leq Ay = AZ - \rho(A)Z$$

Se per assurdo fosse $Y > 0$, si avrebbe:

$$0 \leq Ay - \rho(A)y| \neq 0 se A(...) > 0$$

$$0 < AZ - \rho(A)Z$$

$$0 < Z^{-1}(AZ - \rho(A)Z) = Z^{-1}AZ\mathbb{1} - \rho(A)\mathbb{1}$$

ma

$$\rho(A)\mathbb{1} < Z^{-1}AZ\mathbb{1}$$

e quindi

$$\min Z^{-1}AZ\mathbb{1} \leq \rho(Z^{-1}AZ) = \rho(A)$$

con $\rho(A) < min\{Z^{-1}AZ\mathbb{1}\}$ e questo porta ad un assurdo, e quindi $\exists\ x > 0$ autovalore. □

Bisogna ora dimostrare il gap spettrale, cioè che gli autovalori sono strettamente minori di $\rho(A)$.

Teorema 17.3. *$\rho(A)$ è l'unico autovalore con $|\cdot| = \rho(A)$.*

***Dimostrazione*:** Supponendo, per assurdo, che il punto non sia unico, sia λ tale che $Ax = \lambda x$ con $|\lambda| = \rho(A)$. Dal teorema 17.2 si ha che $A|x| = \rho(A)|x|$, cioè risulta un altro autovalore per lo stesso autovettore, con $|x| > 0$.

Valutando componente per componente si ottiene

$$\rho(A)|x_i| = \sum a_{ij}|x_j|,$$

e utilizzando i precedenti risultati si ricava che

$$|Ax| \leq A|x| = \rho(A)|x|, \text{ con } |Ax| = |\sum a_{ij}x_j|$$

perciò la componente i-esima è minore o uguale a $A|x_i|$, ma essendo

$$|\sum a_{ij}x_j| = |\lambda x_i| = \rho(A)|x_i|,$$

riassumendo si ha:

$$\begin{aligned} \rho(A)|x_i| &= |\lambda x_i| \\ &= |\sum a_{ij}x_j| = \rho(A)|x_i| \\ &= \sum a_{ij}|x_j|. \end{aligned} \tag{17.1}$$

L'ugualianza 17.1 è verificata in quanto $|\sum c_i| \leq \sum |c_i|$ sempre, ma se i valori sono allineati $c_i = |c_i|e^{j\vartheta}$ con la medesima fase allora si allineano, applicando al nostro caso si ha che

$$|\sum a_{ij}x_j| = \sum |a_{ij}x_j|$$

quindi

$$a_{ij}x_j = |a_{ij}x_j|e^{j\vartheta} = a_{ij}|x_j|e^{j\vartheta}$$

e questo implica che

$$x_j = |x_j|e^{j\vartheta},$$

cioè gli x_{ij} sono allineati.

Risulta allora

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |x_1| \\ \vdots \\ |x_N| \end{bmatrix} e^{j\vartheta} = |x|e^{j\vartheta}$$

con autovalori che hanno lo stesso modulo del raggio spettrale.

Sostituendo il risultato ottenuto $x = |x|e^{j\vartheta}$ in $Ax = \lambda x$ si avrà

$$\underbrace{A|x|}_{|\lambda||x|=\rho(A)|x|} e^{j\vartheta} = \lambda|x|e^{j\vartheta} \Rightarrow |\lambda||x|e^{j\vartheta} = \rho(A)|x|e^{j\vartheta} = \rho(A)\underbrace{|x|e^{j\vartheta}}_{x} = \rho(A)x$$

e in particolare che $Ax = \rho(A)x$, cioè $\lambda = \rho(A)$. □

Infine l'ultimo risultato riguarda la molteplicità spettrale di $\rho(A)$, come descritto dal seguente teorema.

Teorema 17.4. *$\rho(A)$ ha molteplicità geometrica unitaria (cioè ha un unico miniblocco di Jordan relativo all'autovalore).*

***Dimostrazione*:** si considerino x e y autovalori, cioè $Ax = \rho(A)x$ e $Ay = \rho(A)y$; combinazioni lineari dei due autovalori $\alpha x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risultano essere a loro volta autovalori. Considerando solo $\{\alpha, \beta \mid \alpha x + \beta y \geq 0\}$ si pongono condizioni sui singoli valori, cioè $\alpha x_i + \beta y_i \geq 0$, ottenendo un'intersezione di semipiani, come rappresentato in Figura 17.1.

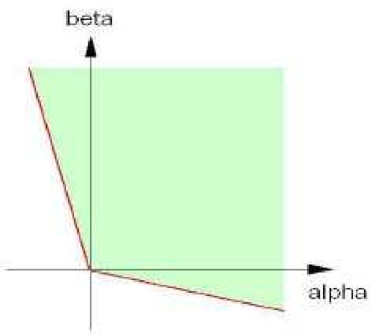

Figure 17.1.

Sul bordo si ha che una delle componenti è uguale a zero:

$$\exists \alpha, \beta | \alpha x + \beta y = 0$$

e si arriva ad un assurdo, infatti in questo caso non ho più autovettore e da questo si deduce che deve essere $\rho(A)$ unico. □

Quella riguardo la molteplicità algebrica è la dimostrazione che più ci interessa per capire la dinamica di A^k, che ci servirà poi per la dinamica dei veicoli $Z(t) = P^t Z(0)$.

Teorema 17.5. *Presa $A > 0$, si consideri un autovettore relativo all'autovalore $\rho(A)$ tale che $Ax = \rho(A)x$ e si calcoli $y^T A = \rho(A)y^T$: normalizzando è possibile trovare $y^T x = 1$ e con questi autovalori normalizzati ottenere*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\rho(A)^{-1}A\right)^k = xy^T = L$$

con L di rango 1. Il moto dei veicoli è dato allora da

$$P^t Z(0) \longrightarrow xy^T Z(0) \Rightarrow P\mathbb{1} = \mathbb{1}.$$

***Dimostrazione*:** Valutiamo le proprietà di L:

- $L^k = x\,\overbrace{y^T x}^{1}\,\overbrace{y^T x}^{1}\cdots\overbrace{y^T x}^{1}\,y^T = xy^T = L$ matrice idempotente.
- $A^k L = A^{k-1}AL = A^{k-1}\overbrace{Ax}^{\rho(A)x}\,y^T = A^{k-1}\rho(A)xy^T = \rho(A)^k L$
- $(A - \rho(A)L)^k = A^k - \rho(A)^k L$ dimostrabile per induzione.

Si ha che

$$\begin{aligned}\left[\rho(A)^{-1}\left(A - \rho(A)L\right)\right]^k &= \rho(A)^{-k}\left(A^k - \rho(A)^k L\right)\\ &= \left(\rho(A)^{-1}A\right)^k - L\end{aligned}$$

e dimostrando che $[\rho(A)^{-1}(A-\rho(A)L)]^k \to 0$ si fa allora vedere che $\left(\rho(A)^{-1}A\right)^k \to L$, bisogna cioè dimostrare che l'autovalore massimo di $\rho\left(A - \rho(A)L\right) < \rho(A)$.

Sia λ autovalore di $A - \rho(A)L$, cioè $\left(A - \rho(A)L\right)v = \lambda Lv$, noto che $LA = \rho(A)L$ si ottiene che

$$\rho(A)Lv - \rho(A)Lv = 0$$

quindi $Lv = 0$ che implica $Av = \lambda v$. Ogni autovalore della nuova matrice $A - \rho(A)L$ è autovalore di A, perciò

$$\lambda\left(A - \rho(A)L\right) \subseteq \lambda(A)$$

e al massimo si ha che il raggio spettrale

$$\rho\left(A - \rho(A)L\right) \leq \rho(A).$$

Dobbiamo dimostrare che vale l'ugualianza.

Supponendo, per assurdo, che

$$\rho\left(A - \rho(A)L\right) = \rho(A)$$

cioè

$$\rho(A) \in \lambda\left(A - \rho(A)L\right),$$

e quindi risulta che x è autovettore relativo, perciò

$$(A - \rho(A)L)\, x = \rho(A)x$$

da cui segue

$$Ax - \rho(A) \underbrace{xy^T}_{L} x = \rho(A)x$$

ed infine

$$Ax - \rho(A)x = \rho(A)x,$$

cioè

$$Ax = 2\rho(A)x.$$

Ma essendo $Ax = \rho(A)x$ si arriva ad un assurdo, infatti x non può essere nullo. Il risultato finale è che $\left(\frac{A}{\rho(A)}\right)^k \to xy^T$ $\square$

Definizione 17.1. *(**Matrici doppiamente stocastiche**) Si dice che una matrice P è doppiamente stocastica se vengono verificate le seguenti condizioni:*

- $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$
- $\mathbb{1}^T P = \mathbb{1}^T$.