PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**III Trim. 2006**

Lezione 12 — Maggio 18

Docente: Luca Schenato *Stesori: Caregaro, Faggion, Girotto, Nicolettis, Pucci*

12.1 Sistemi dinamici con vincoli di velocità

Si è visto nelle lezioni precedenti come il segnale di comando $u(t)$ sia una combinazione di una parte derivante dal controllo in catena aperta, $u_{ff}(t)$, e di una parte derivante dal controllo in catena chiusa, $u_{fb}(t)$:

$$u(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t)$$

È possibile schematizzare le caratteristiche dei due segnali nel seguente modo:

- u_{ff}: catena aperta, $u_{ff}(\tau)$ con $\tau \in [t, +\infty) \Rightarrow$ path-planning

- u_{fb}: catena chiusa, $u_{fb}(\tau)$ con $\tau \in (-\infty, t] \Rightarrow$ path-following

Il problema del controllo è quello di definire il segnale $u(t)$ in modo tale da poter giungere alla configurazione finale voluta, x_f, partendo da una certa configurazione iniziale, x_0. Nel caso di sistemi non lineari anche questa richiesta non è di facile attuazione. Vediamo a tale proposito un esempio che presenta dei vincoli di velocità sul sistema.

Esempio

Consideriamo la schematizzazione di un sistema che può muoversi su due ruote, riportata nelle due seguenti figure:

dove sono indicate le seguenti grandezze:

- s: ruota sinistra;

- d: ruota destra;

- $c.m.$: centro di massa del sistema;

- l: distanza tra il centro di massa e l'asse delle ruote;

- r: raggio delle ruote;

- v_s: velocità della ruota sinistra;

- v_d: velocità della ruota destra;

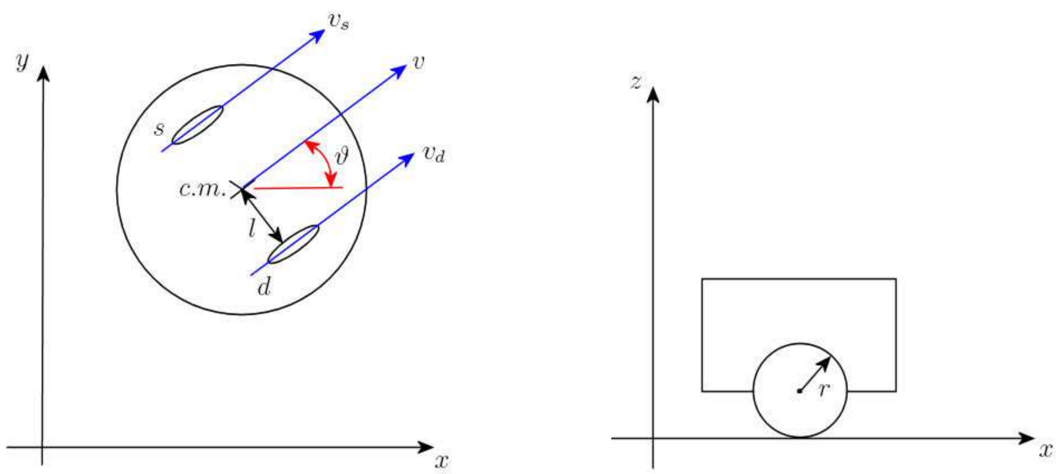

Fig. 12.1. Schema del sistema visto dall'alto *(sinistra)* e schema del sistema visto lateralmente *(destra)*.

- v: velocità del centro di massa;
- ϑ: angolo tra l'asse x e la retta parallela all'inclinazione delle ruote passante per il centro di massa.

Si vuole eseguire un controllo sulla velocità angolare delle due ruote supponendo l'assenza di slittamento, pertanto i segnali di controllo scelti saranno i seguenti:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_d = u_1 \\ \dot{\Phi}_s = u_2 \end{cases}$$

dove con $\dot{\Phi}_i$ si sono indicate le velocità angolari delle ruote.
Date le velocità angolari e conoscendo il raggio delle ruote è immediato ricavare le velocità tangenziali:

$$\begin{cases} v_d = \dot{\Phi}_d r \\ v_s = \dot{\Phi}_s r \end{cases}$$

A questo punto è possibile definire lo stato del sistema, che comprende la posizione del centro di massa e l'orientazione del nostro sistema dinamico:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix}$$

Per un approccio semplificato è possibile considerare solamente le grandezze relative al centro di massa, e cioè la velocità angolare e quella tangenziale, ricavabili nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \frac{v_d - v_s}{2l} = \frac{r}{2l}(u_1 - u_2) \triangleq \tilde{u}_1 \\ v &= \frac{v_s + v_d}{2} = \frac{r}{2}(u_1 + u_2) \triangleq \tilde{u}_2 \end{aligned}$$

I segnali $\tilde{u}_1$ e $\tilde{u}_2$ sono sostanzialmente degli ingressi virtuali che formalizzano l'idea di avere un'unica ruota, centrale al sistema, della quale possiamo comandare velocità e direzione. Si può pensare di avere "compresso" le due ruote su una sola in corrispondenza al centro di massa.
Bisogna infine formalizzare anche il vincolo di non slittamento e lo si può fare nel seguente modo:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan\vartheta$$

Riscrivendo la precedente espressione come di seguito:

$$\dot{y}\cos\vartheta - \dot{x}\sin\vartheta = 0$$

è possibile mettere a confronto i vincoli sulle velocità, che dicono dove non ci si può muovere, e il sistema dinamico associato, che indica invece i possibili spostamenti, in una sorta di legame duale.

Vincoli sulle velocità		Sistema dinamico associato
$\dot{y}\cos\vartheta - \dot{x}\sin\vartheta = 0$	$\Longleftrightarrow$	$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{u}_2\cos\vartheta \\ \dot{y} = \tilde{u}_2\sin\vartheta \\ \dot{\vartheta} = \tilde{u}_1 \end{cases}$

Si consideri ora un generico stato $q \in \mathbb{R}^n$ relativo ad un sistema di interesse e si supponga che quest'ultimo sia soggetto a dei vincoli:

$$a_i(q) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad i = 1, \ldots, k \, (k < n)$$

$$a_i^T(q) \cdot \dot{q} = 0$$

Considerando un singolo vincolo del tipo scritto, esso sta a significare che non è possibile un movimento lungo la retta rappresentante il vincolo stesso, ma è possibile il movimento su un piano perpendicolare alla direzione della retta.

Ovviamente il numero di vincoli determina tutta una serie di direzioni lungo le quali non è possibile muoversi. Ad esempio, nel caso di due vincoli, i movimenti sono possibili ovunque tranne che sul piano definito dai due vettori relativi ai vincoli stessi.
A questo punto ci si può chiedere se i vincoli $\{a_i(q) \quad i = 1, \ldots, k\}$ obblighino a stare su una determinata superficie. Ciò non è detto, perchè in realtà i vincoli su posizione e velocità sono di tipo istantaneo, perciò in un determinato istante un certo movimento può risultare proibito ma questo non pregiudica il raggiungimento di una qualsiasi configurazione finale. Si pensi ad esempio al caso dell'automobile: uno spostamento laterale non è sicuramente consentito ma, con un certo numero di manovre, è possibile portare il mezzo in una qualsiasi posizione.

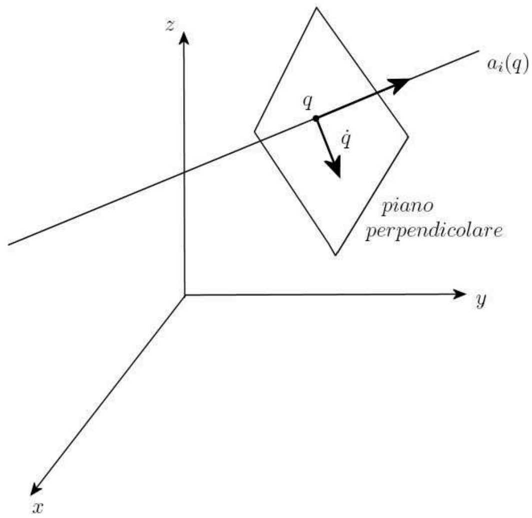

Fig. 12.2. Vincolo sulla velocità

Si avrebbero dei vincoli complessivi sulla posizione se l'ipersuperficie indotta da $a_i(q)$ fosse rappresentabile nella forma $h(q) = 0$ e allora in questo caso non tutte le configurazioni sarebbero raggiungibili dal sistema. Si nota quindi la differenza tra i due casi esaminati, con vincoli solamente sulle velocità e con vincoli anche sulla posizione.

Diamo ora una serie di definizioni formali utili per rendere questi concetti intuitivi analizzabili da un punto di vista matematicamente rigoroso.

Definizione 12.1. *(SISTEMA OLONOMO) Un sistema si dice olonomo se, dati k vincoli $\{a_1(q), \dots, a_k(q)\}$, esistono k funzioni di questo tipo:*

$$h_1(q) = 0 \ \dots \ h_k(q) = 0, \qquad h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

La definizione appena data equivale a dire che lo stato q appartiene ad una ipersuperficie di dimensione $n - k$ immersa in uno spazio di dimensione n.
Si noti che è possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$a_i^T(q) = \frac{\partial h_i(q)}{\partial q} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(h_i(q)\right) = \frac{\partial h_i(q)}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0$$

Infine un'importante osservazione da fare è che i vincoli sulla posizione implicano vincoli sulla velocità ma non vale il viceversa.
Si può ovviamente avere anche un numero di vincoli inferiore a k, con sistemi relativi di diverso tipo:

Definizione 12.2. *Dati i vincoli $\{a_1(q), \dots, a_k(q)\}$ definiti nel seguente modo:*

$$a_i^T(q) \cdot \dot{q} = 0$$

e considerate le funzioni $h_1(q) \ \dots \ h_m(q)$, il sistema si dice:

- *olonomo se $m = k$;*
- *parzialmente anolonomo se $0 < m < k$;*
- *completamente anolonomo se $m = 0$.*

Esempio

Consideriamo un sistema il cui stato debba appartenere alla superficie di una sfera di raggio unitario.

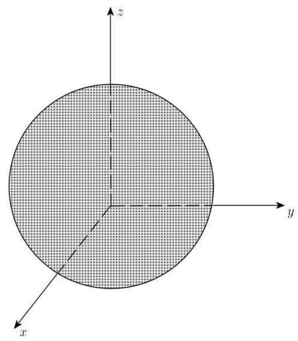

Fig. 12.3. Superficie sferica su cui è vincolato il sistema

Lo stato del sistema perciò può essere espresso nel seguente modo:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Mentre il vincolo che impone l'appartenenza alla superficie della sfera è espresso dalle equazioni:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = h(q) = 0$$

A questo punto, eseguendo la derivata dell'espressione $h(q)$ si ottiene il vincolo sulla velocità:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h(q)) &= \frac{\partial h(q)}{\partial q} \cdot \dot{q} \\ &= a^T(q) \cdot \dot{q} \\ &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \end{aligned}$$

Esprimendo il vincolo in forma vettoriale infine si giunge all'espressione riportata di seguito:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}}_{a^T(q)} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}}_{\dot{q}} = 0$$

Si vede come il vincolo $h(q) = 0$ sia stato infine espresso nella forma $a^T(q) \cdot \dot{q} = 0$.

Si riporta ora il legame duale esistente tra vincoli e sistema di controllo associato a tali vincoli nel caso generale.

VINCOLI		SISTEMA DI CONTROLLO ASSOCIATO
$a_i(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad i = 1, \ldots, k$	DUALE $\Longleftrightarrow$	$g_i(q),\ g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad i = 1, \ldots, m$ $\dot{q} = g_1(q)u_1 + \ldots + g_m(q)u_m \quad u_i \in \mathbb{R}$
Direzioni dove non ci si può muovere (Iperpiano di dimensione k)		Direzioni dove ci si può muovere (Iperpiano di dimensione $m = n - k$)

Considerando tutti i k vincoli è possibile passare all'espressione matriciale:

$$\begin{bmatrix} a_1^T(q) \\ \vdots \\ a_k^T(q) \end{bmatrix} \triangleq A^T(q) \cdot \dot{q} = 0 \qquad \text{dove:} \quad A(q) = \begin{bmatrix} a_1(q) & \ldots & a_k(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times n}$$

Avendo definito la matrice A è possibile vedere che le funzioni $g_i(q)$ appartengono allo spazio nullo di questa matrice. Inoltre, dalla relazione $a_i^T \cdot g_j = 0$ si può osservare come il problema di ricavare le g_j si riduca ad un problema di algebra lineare. Infine, un'ultima considerazione sugli spazi in gioco è che, unendo lo spazio nel quale è possibile muoversi e quello nel quale non ci si può muovere si ritrova $\mathbb{R}^n$:

$$span\{a_1, \ldots, a_k, g_1, \ldots, g_{n-k}\} = \mathbb{R}^n$$