PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**III Trim. 2006**

Lezione 15 — Maggio 25

Docente: Luca Schenato *Stesori: Bortolato, Bustreo, Natali, Soliman, Viola, Zilio*

15.1 Sistemi senza Drift

Riprendiamo il sistema senza drift visto nella lezione precedente:

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + ... + g_m(q)u_m \qquad \begin{array}{l} q \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^m \qquad m \leq n \end{array}$$

Dove le Parentesi di Lie corrispondono a:

$$[g, f](q) = \frac{\partial f}{\partial q} g(q) - \frac{\partial f}{\partial q} f(q) \qquad g, f : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{array}{rcl} \Delta_0(q) & = & span\{g_1, ..., g_m\} \\ \Delta_{i+1}(q) & = & \Delta_i \cup span\{[g_j, v], \qquad j = 1, ..., m \qquad v \in \Delta_i\} \\ & \Downarrow & \\ \Delta_{i+1} & = & \Delta_i(q) \\ \Delta_{i+1} & = & \Delta_i \Rightarrow \Delta_{i+h} = \Delta_i = \bar{\Delta} \qquad \forall h = 0, ..., j \end{array}$$

Da queste, si possono derivare le seguenti proprietà:

1. $\Delta_0(q) = \bar{\Delta}(q)$ $\forall q \Rightarrow$ *Sistema Olonomo*
2. $\bar{\Delta}(q) = \mathbb{R}^n$ $\forall q \Rightarrow$ *Sistema completamente anolonomo* $\Rightarrow$ *Controllabile*

Nel caso in cui non valga nessuna delle due proprietà appena elencate, il sistema è *parzialmente anolonomo*.

15.2 Sistemi in Catena a m ingressi (m=2)

Riconsideriamo l'equazione del sistema per soli due ingressi:

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + g_2(q)u_2 \qquad q \in \mathbb{R}^n$$

Eseguiamo ora una breve analisi per verificare che il sistema è completamente anolonomo.

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix} \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[g_1, g_2] = 0 - \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = Adj_{g1}^{1} g_2$$

Ora viene definita Adj_{g1}^{k+1} utilizzando ripetutamente la componente g_1: questo è sufficiente per dimostrare che si ottiene l'intero spazio $\mathbb{R}^n$ e di conseguenza la caratteristica di *anolonomità*.

$$Adj_{g_1}^{k+1} \triangleq \left[g_1, Adj_{g_1}^{k} g_2\right] = [g_1, [g_1, [g_1, g_2]]] = -\frac{\partial g_1}{\partial q} Adj_{g_1}^{k} g_2$$

Per cui:

$$\bar{\Delta} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^{n-2} \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^n$$

Ingressi

Consideriamo ora i seguenti ingressi:
$u_1(t) = a\sin(2\pi t)$
$u_2(t) = b\cos(2k\pi t)$

Vediamo ora come evolve il sistema:

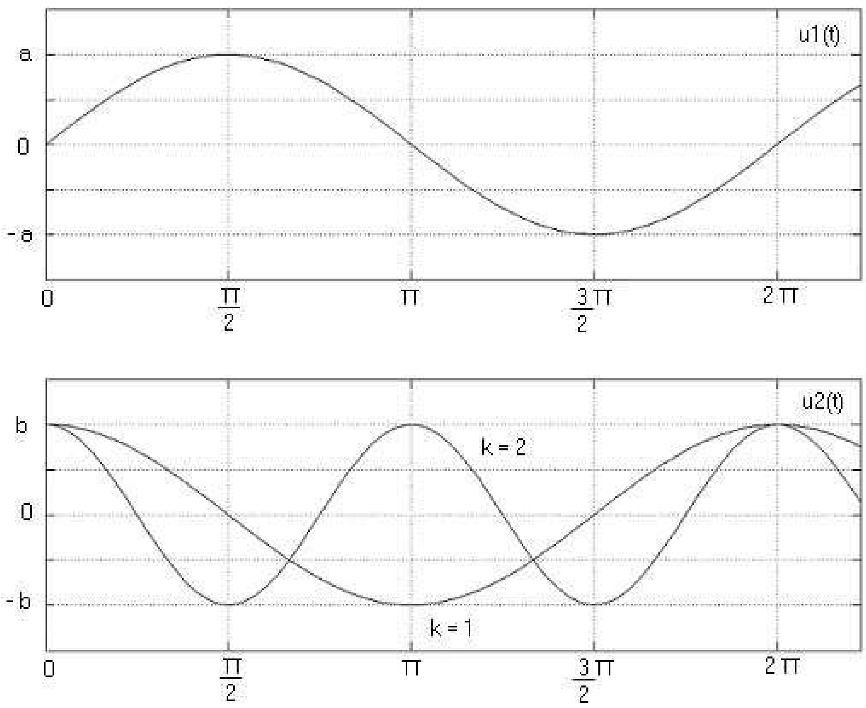


Figura 15.1. Ingressi

$$\begin{matrix} q_1^0 \to q_1^f \\ q_2^0 \to q_2^f \end{matrix} \tag{15.1}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = u_1 \\ \dot{q}_2 = u_2 \\ \dot{q}_3 = q_2 u_1 \\ \dot{q}_4 = q_3 u_2 \end{cases}$$

$u1 = a \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad q_1(1) = q_1^0 + a = q_1^f$

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= \frac{a}{2\pi}(1-\cos(2\pi t)) + q_1(0) \\
q_2(t) &= \frac{b}{2\pi k}\sin(2k\pi t) + q_2(0) \qquad (15.2)\\
q_3(t) &= q_3(0) + \int_0^t asin(2\pi\tau)\left(\frac{b}{2k\pi}\sin(2k\pi\tau) + q_2(0)\right)d\tau \qquad (15.3)
\end{aligned}
$$

Ricordando la formula di prostaferesi

$$
\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{2} - \frac{\cos(\alpha+\beta)}{2} \qquad (15.4)
$$

possiamo valutare il valore di $q_3(t)$ dopo un periodo, cioé in t=1:

$$
q_3(t) = q_3(0) + \int_0^t \frac{ab}{2k\pi}\left[\frac{\cos\left(2\pi(k-1)\right)\tau}{2} - \frac{\cos\left(2\pi(k+1)\right)\tau}{2}\right]d\tau \qquad (15.5)
$$

Il primo termine sinusoidale si annulla per ogni $k > 1$, il secondo per ogni $k \geq 1$ in quanto periodici. L'unica situazione in cui non si annullano entrambi gli addendi dell'integrale si ha quindi per $k = 1$, e risulta

$$
q_3(1) = q_3(0) + \frac{ab}{4\pi} \qquad (15.6)
$$

La relazione che lega a e b é

$$
\left\{\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 4\pi(q_3^f - q_3^0) \end{aligned}\right. \qquad (15.7)
$$

k controlla il termine q_{k+2}. Il sistema viene detto a catena poiché il controllo viene propagato in cascata.

$$
q_h(t) = \frac{1}{2^{k+1}}\frac{a^k b}{(2\pi)^k}\frac{1}{k!}t + q_{k+2}(0) + \{\textit{termini periodici di periodo multiplo di } 2\pi\} \qquad (15.8)
$$

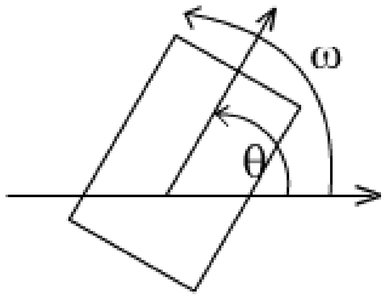
I termini periodici di periodo multiplo di 2 si annullano giá per t=1, quindi

$$
q_{k+2}^f(1) - q_{k+2}(0) = \left(\frac{a}{4\pi}\right)^k \frac{b}{k!} \qquad (15.9)
$$

Teorema 15.1. *Un sistema anolonomo senza drift con 2 ingressi ed $n \leq 4$ puó sempre essere trasformato in un sistema a catena. (Questo é il caso dell'automobile)*

Se $n > 4$ ed $m > 2$ esistono condizioni necessarie e sufficienti per determinare se un sistema puó essere trasformato in uno a catena. (Questo é il caso del tir con rimorchio)

15.3 Esempio



$$\begin{cases} \dot{x} & = & v\cos\theta \\ \dot{y} & = & v\sin\theta \\ \dot{\theta} & = & \omega \end{cases} \tag{15.10}$$

$$\begin{cases} q_1 & \triangleq & \theta \\ q_2 & \triangleq & x\cos\theta + y\sin\theta \\ q_1 & \triangleq & x\sin\theta - y\cos\theta \end{cases} \tag{15.11}$$

Si definiscono due ingressi virtuali ausiliari:

$$\begin{cases} u_1 & = & \omega \\ u_2 & = & v - q_3 u_1 = v - q_3\omega \end{cases} \tag{15.12}$$

Risulta

$$\begin{cases} \dot{q}_1 & = & \dot{\theta} = \omega = u_1 \\ \dot{q}_2 & = & \dot{x}\cos\theta + x\dot{\theta}\sin\theta + \dot{y}\sin\theta + y\dot{\theta}\cos\theta \\ & = & \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - u_1\left(x\sin\theta - y\cos\theta\right) \end{cases} \tag{15.13}$$

Dal sistema iniziale

$$v = v\cos^2\theta + v\sin^2\theta = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \tag{15.14}$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta + y\dot{\theta}\sin\theta \\ &= \dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta + u_1\left(x\cos\theta + y\sin\theta\right) \\ &= \left(v\cos\theta\sin\theta - v\sin\theta\cos\theta\right) + u_1 q_2 \\ &= q_2 u_1 \end{aligned} \tag{15.15}$$

dove nel secondo passaggio si é tenuto conto dell'uguaglianza $x\cos\theta + y\sin\theta = q_2$.

Abbiamo quindi verificato che, dati $(x, y, \theta, v, \omega)$ é possibile ricavare facilmente $(q_1, q_2, q_3, u_1, u_2)$ e viceversa:

$$(x, y, \theta, v, \omega) \;\Leftrightarrow\; (q_1, q_2, q_3, u_1, u_2) \tag{15.16}$$

Infatti dagli

$$\begin{cases} u_1(t) \quad t \in [0, T] \\ u_2(t) \quad t \in [0, T] \\ q_1(t), q_2(t), q_3(t) \end{cases} \tag{15.17}$$

trovati si possono ricalcolare

$$v(t), \omega(t) \quad t \in [0, T] \tag{15.18}$$