2.1 Il filtro di Kalman

Il filtro di Kalman è definito come:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \mathbb{E}\left[x_{k+1}|y_0, \ldots, y_{k+1}\right] = \mathbb{E}\left[x_{k+1}|y_{k+1}, Y^k\right]$$

dove $Y^k = (y_k, \ldots, y_1, y_0)$. Vogliamo trovarne un'espressione ricorsiva che ne faciliti il calcolo ad ogni passo.

L'espressione esplicita di $\mathbb{E}\left[X|Y\right]$ è facilmente calcolabile se X e Y sono due variabili aleatorie congiuntamente gaussiane e si conoscono le espressioni di μ_X, μ_Y e $\begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}$.

Nel nostro caso consideriamo $X = x_{k+1}|Y^k$ e $Y = y_{k+1}|Y^k$; è, quindi, necessario calcolare le espressioni esplicite di:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \mathbb{E}\left[x_{k+1}|Y^k\right] && (2.1)\\
\mu_Y &= \mathbb{E}\left[y_{k+1}|Y^k\right] && (2.2)\\
P_{k+1|k} = \Sigma_{XX} &= Var\left[x_{k+1}|Y^k\right] && (2.3)\\
\Sigma_{YY} &= Var\left[y_{k+1}|Y^k\right] && (2.4)\\
\Sigma_{XY} = \Sigma_{YX}^T &= Cov\left[x_{k+1}, y_{k+1}|Y^k\right]. && (2.5)
\end{aligned}$$

da esse dedurremo l'espressione dello stimatore ottimo come:

$$\mathbb{E}\left[X|Y\right] = \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\left(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}\right) \tag{2.6}$$

e la varianza dell'errore di stima come:

$$\Sigma_{X|Y} = P_{k+1|k+1} = \Sigma_{XX} - \Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX} \tag{2.7}$$

Calcoliamo in forma esplicita i termini 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5 ricordando che le medie di prodotti di termini scorrelati sono nulle.

$$\mathbb{E}\left[x_{k+1}|Y^k\right] = \mathbb{E}\left[Ax_k + w_k|Y^k\right] = A\mathbb{E}\left[x_k|Y^k\right] + \mathbb{E}\left[w_k|Y^k\right] = A\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k+1|k}$$

$$\mathbb{E}\left[y_{k+1}|Y^k\right] = \mathbb{E}\left[Cx_{k+1} + v_{k+1}|Y^k\right] = C\mathbb{E}\left[x_{k+1}|Y^k\right] + \mathbb{E}\left[v_{k+1}|Y^k\right] = C\hat{x}_{k+1|k} = CA\hat{x}_{k|k}$$

$$
\begin{aligned}
Var\left[x_{k+1}|Y^k\right] &= \mathbb{E}\left[\left(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k}\right)\left(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k}\right)^T|Y^k\right] = P_{k+1|k} \\
&= \mathbb{E}\left[\left(Ax_k+w_k-A\hat{x}_{k|k}\right)\left(Ax_k+w_k-A\hat{x}_{k|k}\right)^T|Y^k\right] \\
&= A\mathbb{E}\left[\left(x_k-\hat{x}_{k|k}\right)\left(x_k-\hat{x}_{k|k}\right)^T|Y^k\right]A^T + A\mathbb{E}\left[\left(x_k-\hat{x}_{k|k}\right)w_k^T|Y^k\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[w_k\left(x_k-\hat{x}_{k|k}\right)^T|Y^k\right]A^T + \mathbb{E}\left[w_kw_k^T|Y^k\right] \\
&= AP_{k|k}A^T + Q
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var\left[y_{k+1}|Y^k\right] &= \mathbb{E}\left[\left(y_{k+1}-\hat{y}_{k+1|k}\right)\left(y_{k+1}-\hat{y}_{k+1|k}\right)^T|Y^k\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(Cx_{k+1}+v_{k+1}-C\hat{x}_{k+1|k}\right)\left(Cx_{k+1}+v_{k+1}-C\hat{x}_{k+1|k}\right)^T|Y^k\right] \\
&= C\mathbb{E}\left[\left(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k}\right)\left(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k}\right)^T|Y^k\right]C^T + C\mathbb{E}\left[\left(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k}\right)v_{k+1}^T|Y^k\right] \\
&\quad +\mathbb{E}\left[v_{k+1}\left(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k}\right)^T|Y^k\right]C^T + \mathbb{E}\left[v_{k+1}v_{k+1}^T|Y^k\right] \\
&= CP_{k+1|k}C^T + R
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov\left[x_{k+1},y_{k+1}|Y^k\right] &= \mathbb{E}\left[\left(x_{k+1}-\hat{x}_{k+1|k}\right)\left(y_{k+1}-\hat{y}_{k+1|k}\right)^T|Y^k\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(Ax_k-A\hat{x}_{k|k}+w_k\right)\left(CAx_k-CA\hat{x}_{k|k}+v_{k+1}+Cw_k\right)^T|Y^k\right] \\
&= A\mathbb{E}\left[\left(x_k-\hat{x}_{k|k}\right)\left(x_k-\hat{x}_{k|k}\right)^T|Y^k\right]A^TC^T + \mathbb{E}\left[w_kw_k^T|Y^k\right]C^T \\
&= AP_{k|k}A^TC^T + QC^T \\
&= P_{k+1|k}C^T
\end{aligned}
$$

Si deduce che, definito $z = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix}$, si ha:

$$
p\left(z|Y^k\right) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1|k} \\ C\hat{x}_{k+1|k} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_{k+1|k} & P_{k+1|k}C^T \\ CP_{k+1|k} & CP_{k+1|k}C^T + R \end{bmatrix}\right)
$$

con:

$$
\hat{x}_{k+1|k} = A\hat{x}_{k|k}
$$

$$
P_{k+1|k} = AP_{k|k}A^T + Q
$$

Calcoliamo quindi:

$$
p\left(x_{k+1}|Y^{k+1}\right) \sim \mathcal{N}\left(\hat{x}_{k+1|k+1}, P_{k+1|k+1}\right)
$$

Sostituendo i termini calcolati nelle espressioni 2.6 e 2.7 si ottiene per lo stimatore ottimo:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + P_{k+1|k}C^T \left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{-1} \left(y_{k+1} - Cx_{k+1|k}\right)$$

che posto:

$$K_{k+1|k+1} = P_{k+1|k}C^T \left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{-1}$$

diviene:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1|k+1} \left(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k}\right)$$

dove $K_{k+1|k+1}$ è detto guadagno di Kalman. E per quanto riguarda l'errore di stima:

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T \left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{-1} CP_{k+1|k}$$

Riassumendo le equazioni ricorsive del filtro di Kalman risultano essere:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k+1|k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1|k+1} \left(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k}\right) && (2.8)\\
P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T \left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{-1} CP_{k+1|k} && (2.9)\\
K_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k}C^T \left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{-1} && (2.10)
\end{aligned}$$

con le condizioni iniziali:

$$\hat{x}_{0|-1} = \mathbb{E}\left[x_0\right] \qquad P_{0|-1} = Var\left[x_0\right]. \tag{2.11}$$

Nel caso in cui la varianza dell'errore sia semplicemente semidefinita positiva, cioe' $R \geq 0$, le equazioni del filtro di Kalman possono essere generalizzate semplicemente sostituendo l'operazione di inversa con quella di pseudoinversa:

$$\begin{aligned}
P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T \left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{\dagger} CP_{k+1|k} && (2.12)\\
K_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k}C^T \left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{\dagger} && (2.13)
\end{aligned}$$