PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**III Trim. 2006**

Lezione 3 — Aprile 26

Docente: Luca Schenato — *Stesore: Caregaro, Nicolettis, Pucci*

3.1 Ricapitolazione del filtro di Kalman

Si consideri il modello stocastico lineare:

$$\begin{cases} x_{k+1} &= Ax_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \end{cases} \tag{3.1}$$

dove:

$$\begin{cases} v_k &\sim \mathcal{N}(0, R) \\ w_k &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ x_0 &\sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0) \end{cases} \tag{3.2}$$

Dalle definizioni:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|h} &\triangleq \mathbb{E}[x_k | y_h, \ldots, y_0, x_0] \\ P_{k|h} &\triangleq \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|h})(x_k - \hat{x}_{k|h})^T | y_h, \ldots, y_0, x_0] \end{aligned} \tag{3.3}$$

e considerando che $\hat{x}_{k|h}$ è anch'essa una variabile aleatoria Gaussiana, si possono ricavare le seguenti equazioni del filtro di Kalman, che rappresentano un metodo ricorsivo per il calcolo della stima ottima:

$$\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k} \\ P_{k+1|k} &= AP_{k|k}A^T + Q \end{aligned}\right\} \text{predizione} \\[1em]
&\left.\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &= \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k}) \\ P_{k+1|k+1} &= P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T(CP_{k+1|k}C^T + R)^{-1}CP_{k+1|k} \end{aligned}\right\} \text{aggiornamento} \\[1em]
&K_{k+1} \triangleq P_{k+1|k}C^T(CP_{k+1|k}C^T + R)^{-1} \;\} \text{ guadagno di Kalman} \\[1em]
&\left.\begin{aligned} \hat{x}_{0|-1} &= \bar{x}_0 \\ P_{0|-1} &= P_0 \end{aligned}\right\} \text{inizializzazione}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Le equazioni del filtro (3.4) sono valide sotto le seguenti ipotesi:

- $R > 0$, $Q \geq 0$
- scorrelazione tra v_k e w_k

Per quanto riguarda la prima ipotesi, quest'ultima può essere "rilassata" a $R \geq 0$, introducendo la pseudoinversa al posto dell'inversa nelle formule relative all'aggiornamento del filtro.
Anche l'ipotesi di scorrelazione tra v_k e w_k non è necessaria, ed è stata introdotta per semplificare le equazioni: nel caso essa non valga, si rimanda a [1], pag. 290.
Le equazioni valgono, più in generale, anche nel caso in cui le matrici A,C,R,Q non siano costanti, ma dipendano dall'istante temporale k (processo non stazionario):

$$A = A_k \ ; \ C = C_k \ ; \ R = R_k \ ; \ Q = Q_k \tag{3.5}$$

Osservazioni:

Si ritiene utile a questo riassumere alcune importanti osservazioni sulle equazioni del filtro di Kalman scritte.

1. Il processo non deve necessariamente essere stazionario.
2. L'ipotesi di scorrelazione tra v_k e w_k non è necessaria.
3. Si può assumere R semidefinita-positiva ($R \geq 0$) semplicemente sostituendo nelle equazioni la pseudoinversa al posto dell'inversa.
4. La stima è lineare nelle misure.
5. $\mathbb{E}[x_k|y_k,\ldots,y_0] = \mathbb{E}[x_k|\hat{x}_{k-1|k-1}, y_k]$ cioè tutta l'informazione dall'istante 0 all'istante $(k-1)$ è contenuta nella stima all'istante $(k-1)$.
6. Il guadagno ottimo, $K = K_k$, è tempo variante, anche nel caso in cui il sistema sia tempo invariante.

Viene di seguito riportato un semplice esempio riguardante la stima di posizione e velocità relativo ad un generico veicolo.

Esempio

Si consideri un generico veicolo in movimento, le cui grandezze di interesse sono ovviamente posizione e velocità. Si suppone di considerare un movimento in due dimensioni, pertanto si avranno due componenti per ciascuna delle grandezze elencate. Si può perciò definire un vettore di stato per il sistema in esame:

$$x = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

dove le grandezze indicate sono:

- p_x: componente della posizione lungo la direzione x;
- p_y: componente della posizione lungo la direzione y;
- v_x: componente della velocità lungo la direzione x;
- v_y: componente della velocità lungo la direzione y.

Si vuole effettuare una stima della posizione del veicolo istante per istante, facendo affidamento anche alle misure ottenute per mezzo di un apparecchio radar. Si deve tenere presente che sia le misure sia le stime saranno inevitabilmente affette da incertezza.

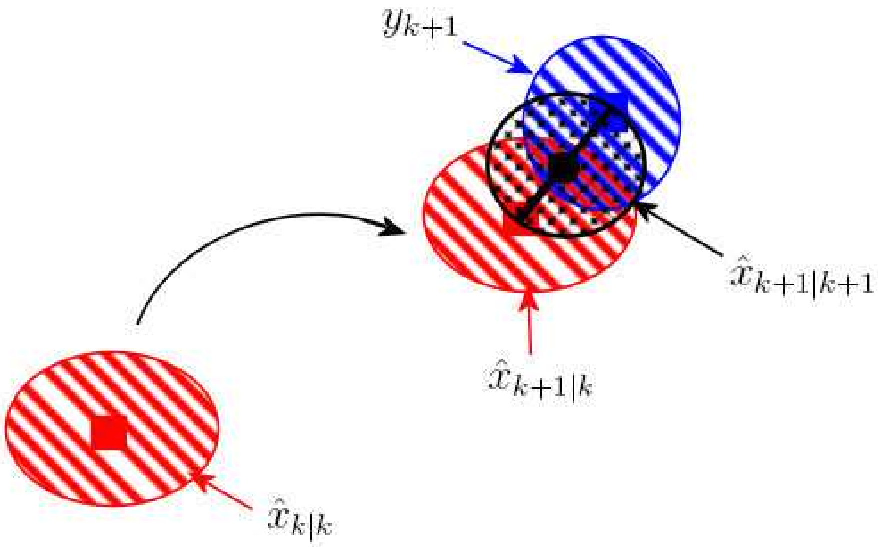

Fig. 3.1. Stima della posizione e della velocità di un veicolo

In figura 3.1 sono riportate le seguenti grandezze:

- $\hat{x}_{k|k}$: stima dello stato all'istante k date le misure fino a k;
- $\hat{x}_{k+1|k}$: predizione dello stato all'istante $k+1$ date le misure fino a k;
- $\hat{x}_{k+1|k+1}$: stima ottima dello stato all'istante $k+1$ date le misure fino a $k+1$;
- y_{k+1}: misura fornita dal radar all'istante $k+1$.

Le ellissi riportate in corrispondenza ad ogni valore indicato rappresentano la relativa incertezza. Si noti che in realtà le ellissi dovrebbero essere considerate in quattro dimensioni, visto che questa è la dimensione del vettore di stato.
Alcune considerazioni sulle dimensioni di queste rappresentazioni dell'incertezza:

- l'ellisse relativa a $\hat{x}_{k|k}$ ha dimensione proporzionale a $P_{k|k}$;

- l'ellisse relativa a $\hat{x}_{k+1|k}$ ha dimensione proporzionale a $P_{k+1|k}$;
- l'ellisse relativa a $\hat{x}_{k+1|k+1}$ ha dimensione proporzionale a $P_{k+1|k+1}$;
- l'ellisse relativa a y_{k+1} ha dimensione proporzionale a R.

Per quanto riguarda la stima ottima, $\hat{x}_{k+1|k+1}$, si può dire che essa si trova sicuramente in una posizione intermedia tra la predizione $\hat{x}_{k+1|k}$ e la misura y_{k+1}, cioè sul segmento indicato in figura 3.1, infatti la sua espressione è la seguente:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k})$$

La relativa incertezza è, come già detto, un'ellisse di dimensione proporzionale a $P_{k+1|k+1}$ e centrata in $\hat{x}_{k+1|k+1}$. Si conoscono pertanto la dimensione ed il centro dell'ellisse in questione. Infine, si vuole sottolineare il fatto che la dimensione dell'ellisse relativa alla predizione avrà dimensione maggiore rispetto a quella relativa alla stima all'istante k viste la dinamica del sistema e l'aggiunta di rumore, mentre, per quanto riguarda la dimensione dell'ellisse relativa alla stima ottima all'istante $k+1$, si avrà una diminuzione della stessa, infatti nell'equazione di aggiornamento della matrice $P_{k+1|k+1}$ si può notare la presenza di un segno negativo.

3.2 Filtro a guadagno costante

Dalle equazioni (3.4) è facile intuire che l'algoritmo richiede l'inversione e la memorizzazione di matrici di dimensioni via via crescenti con k: si può pensare allora di introdurre un nuovo stimatore[1], del tutto simile al precedente, che abbia però un guadagno costante K. Dalle (3.4) si ricava:

$$\hat{g}(y) \triangleq \hat{x}_{k+1|k+1} = A\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k}) \tag{3.6}$$

Si definisce allora:

$$\tilde{g}(y) \triangleq \tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + K(y_{k+1} - CA\tilde{x}_{k|k}) \tag{3.7}$$

Come nel caso del filtro di Kalman si avrà:

$$\tilde{x}_{k+1|k} = A\tilde{x}_{k|k} \tag{3.8}$$

$$\tilde{P}_{k|k} = \mathbb{E}[(x_k - \tilde{x}_{k|k})(x_k - \tilde{x}_{k|k})^T | y_k, \dots, y_0, x_0] \tag{3.9}$$

$$\tilde{P}_{k+1|k} = \mathbb{E}[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})^T | y_k, \dots, y_0, x_0] \tag{3.10}$$

Da (3.7) e (3.8) è facile ricavare:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1|k} &= A(\underbrace{A\tilde{x}_{k-1|k-1}}_{\tilde{x}_{k|k-1}} + K(y_k - CA\tilde{x}_{k-1|k-1})) \qquad (3.11)\\ &= A\tilde{x}_{k|k-1} + AK(y_k - C\tilde{x}_{k|k-1}) \end{aligned}$$

[1]Si noti che lo stimatore così introdotto non è più lo stimatore ottimo

da cui si ottiene la seguente espressione per l'errore di stima del filtro appena introdotto:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_{k+1|k} &\triangleq x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k} \\ &= Ax_k + w_k - (A\tilde{x}_{k|k-1} + AK(Cx_k + v_k - C\tilde{x}_{k|k-1})) \\ &= A(I-KC)\tilde{e}_{k|k-1} + w_k - AKv_k \end{aligned} \tag{3.12}$$

Si noti che $\tilde{e}_{k|k-1}$ è scorrelato sia da w_k che da v_k.
È evidente che la scelta del guadagno K sia un compromesso tra stabilità del sistema (l'errore non deve divergere) e riduzione del rumore v_k.
Dalle (3.10) e (3.12), ricordando l'ipotesi di incorrelazione tra v_k, w_k e $\tilde{e}_{k|k-1}$, si ricava:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k+1|k} &= \mathbb{E}[\tilde{e}_{k+1|k}\tilde{e}^T_{k+1|k}|y_k,\ldots,y_0,x_0] \\ &= \mathbb{E}[A(I-KC)\tilde{e}_{k|k-1}\tilde{e}^T_{k|k-1}(I-KC)^TA^T] + \mathbb{E}[w_kw_k^T] + \mathbb{E}[AKv_kv_k^TK^TA^T] \\ &= A(I-KC)\tilde{P}_{k|k-1}(I-KC)^TA^T + Q + AKRK^TA^T \end{aligned} \tag{3.13}$$

con, al solito:

$$\tilde{P}_{0|-1} = P_0 \tag{3.14}$$

Il filtro così introdotto non richiede inversioni di matrici e la memorizzazione di $P_{k|k-1}$, tuttavia ciò si paga con un peggioramento delle prestazioni. Infatti non essendo ottimo il filtro con guadagno statico necessariamente dobbiamo avere:

$$\tilde{P}_{k|k-1} \geq P_{k|k-1}\ \forall k \tag{3.15}$$

Dimostreremo comunque che esiste un opportuno valore del guadagno $K = K^{opt}$ tale che:

$$\begin{cases} \tilde{P}_{k|k-1} \rightarrow \tilde{P}_\infty \\ P_{k|k-1} \rightarrow P_\infty \\ \tilde{P}_\infty = P_\infty \end{cases} \tag{3.16}$$

cioè a regime le covarianze degli errori di stima dei due filtri coincidono. Ciò significa che, terminato il transitorio iniziale, si deve avere:

$$\tilde{x}_{k+1|k} \rightarrow \hat{x}_{k+1|k} \tag{3.17}$$

e quindi i due filtri hanno comportamento identico.

Bibliografia

[1] Giorgio Picci. *Fitraggio Statistico (Wiener, Levinson, Kalman) e Applicazioni*. Libreria Progetto, 2006.