PSC: Progettazione di sistemi di controllo **III Trim. 2006**

Lezione 4 — Aprile 27

Docente: Luca Schenato *Stesori: Bandinu Enrico, Bruschetta Mattia, Macchion Carlo*

4.1 Equazioni filtro di Kalman

Riassumendo le lezioni precedenti, le equazioni ricorsive del filtro di Kalman sono:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = A\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}\left(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k}\right) \tag{4.1}$$

$$P_{k+1|k} = AP_{k|k}A^T + Q \tag{4.2}$$

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T\left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{-1}CP_{k+1|k} \tag{4.3}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k}C^T\left(CP_{k+1|k}C^T + R\right)^{-1} \tag{4.4}$$

con condizioni iniziali:

$$P_{0|-1} = P_0 \quad \hat{x}_0 = \bar{x}_0 \tag{4.5}$$

Essendo verificata la condizione $\hat{x}_{k|k} = E\left[x_k|y_k \dots y_0\right]$ lo stimatore costruito é definito *ottimo*.

Per eseguire i calcoli é necessaria la memorizzazione delle matrici $\hat{x}_{k+1|k+1}$, $P_{k+1|k}$ e $P_{k+1|k+1}$ ad ogni passo.

Il filtro risulta tempo variante a causa dell'aggiornamento della matrice K_{k+1} ad ogni passo.

4.2 Equazioni filtro statico

Uno stimatore simile a quello precedentemente definito é lo stimatore *statico*, nel quale non avviene l'aggiornamento della matrice K_k, permettendo una maggiore velocitá di calcolo, in quanto non necessita dell'aggiornamento di $P_{k+1|k+1}$ estremamente oneroso, a livello computazionale, a causa dell'inversione della matrice al suo interno (vedi eq. 4.3).

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + K_{k+1}\left(y_{k+1} - CA\tilde{x}_{k|k}\right) \tag{4.6}$$

con condizioni iniziali:

$$\tilde{x}_{0|0} = \bar{x}_0 \tag{4.7}$$

4.3 Analisi equazioni dei filtri

L'errore commesso dagli stimatori statici (che risultano *non ottimi* ma piú semplici da implementare e veloci) é data da:

$$\tilde{P}_{k+1|k} = E\left[\left(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k}\right)\left(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k}\right)^T |y_0 \dots y_k\right] \tag{4.8}$$

che sviluppando i singoli termini porta ad ottenere:

$$\tilde{P}_{k+1|k} = A\left(I - KC\right)\tilde{P}_{k|k-1}\left(I - KC\right)^T A^T + Q + AKRK^T A^T \tag{4.9}$$

Con abuso di notazione definiamo $P_{k+1|k} = P_{k+1}$, e definiremo $\tilde{P}_{k+1} = \mathcal{L}(K, \tilde{P}_k)$.

In analogo modo é possibile eseguire la stessa analisi nel caso degli stimatori di Kalman sostituendo in 4.2 il valore di 4.3 al posto di $P_{k|k}$, ottenendo:

$$P_{k+1|k} = AP_{k|k+1}A^T + Q - AP_{k|k-1}C^T\left(CP_{k|k-1}C^T + R\right)^{-1} CP_{k|k}A^T \tag{4.10}$$

e si puó defire $P_{k+1} = \Phi\left(P_k\right)$ con analogo abuso di notazione $\left(P_{k+1} = P_{k+1}\right)$.

L'analisi del comportamento dei termini P_{k+1} e $\tilde{P}_{k+1}$ ci dá la stima dell'errore commesso nei due casi. Essendo lo stimatore statico non ottimo risulta sempre verificata la disuguaglianza:

$$\tilde{P}_k \geq P_k \quad \forall k \tag{4.11}$$

a pari condizione iniziale.

Vogliamo dimostrare che:

1. $P_k \rightarrow P_\infty \Rightarrow K_k \rightarrow K_\infty = P_\infty C\left(C^T P_\infty C + R\right)^{-1}$ valore stazionario
2. condizioni di convergenza, condizioni iniziale P_0 necessarie e unicitá della soluzione P_∞
3. analisi del caso di converganza a valore limite, cioé: $\tilde{P}_k \rightarrow \tilde{P}_\infty$
4. se $K = K_\infty$, $\tilde{P}_k \rightarrow P_\infty$?

La condizione numero 4, se verificata, porta ad affermare che dopo un tempo sufficientemente lungo si ha prestazioni analoghe per i due stimatori presi in esame (Kalman e statico).

4.3.1 Caso scalare

Prendendo in esame, per comoditá, un caso scalare, ovvero:

$$A = a \quad Q = q \quad R = r \quad \in \mathbb{R} \tag{4.12}$$

considerando $C = 1$, eventualmente riscalando il problema, e comunque senza perdita di generalitá, possiamo calcolare i valori:

$$\tilde{p}_{k+1} = a^2 (1-k)^2 \tilde{p}_k + ra^2k^2 + q = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_k) \tag{4.13}$$

e

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 p_k^2}{p_k + r} \\ &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 p_k^2 - a^2 r^2 + a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 (p_k - r)(p_k + r) + a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= a^2 p_k + q - a^2 (p_k - r) - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= q + a^2 r - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= \Phi(p_k) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Riassumendo i risultati ottenuti:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k+1} &= a^2 (1-k)^2 \tilde{p}_k + ra^2k^2 + q &&= \mathcal{L}(k, \tilde{p}_k) \\ p_{k+1} &= q + a^2 r - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} &&= \Phi(p_k) \end{aligned} \tag{4.15}$$

si ha, quindi, delle mappe per il calcolo del valore successivo. Graficamente si ottengono gli andamenti riportati in figura 4.1.

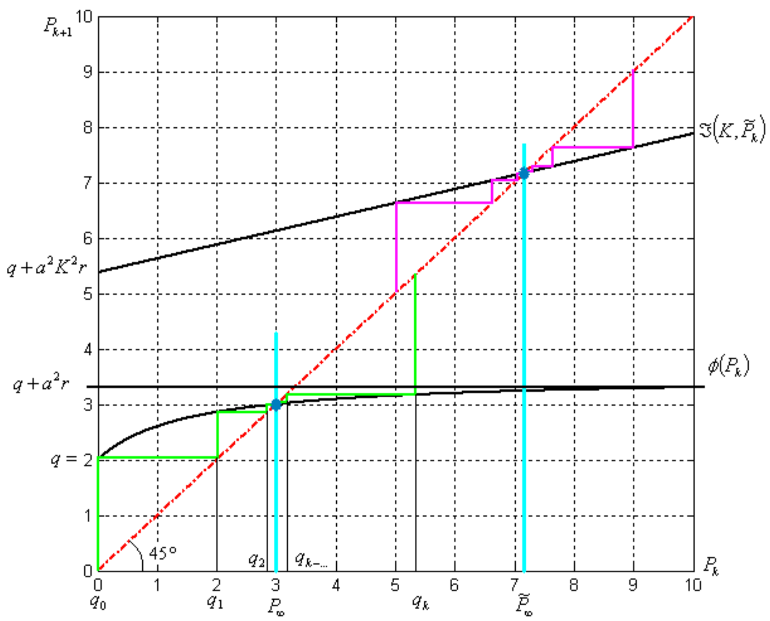

Figure 4.1. Mappa grafica per calcolo dell'aggiornamento di P_{k+1}

La tangenza della curva generata da p_{k+1} vale $\frac{d\Phi}{dP} = \frac{a^2 r^2}{(p_k + r)^2}$, che calcolata in $p_k = 0$ risulta pari a a^2.

La $\tilde{p}_{k+1}$ é una funzione lineare di valore $q+r^2a^2k^2$ in $\tilde{p}_k = 0$ di pendenza $\frac{d\mathcal{L}}{dP} = a^2(1-k)^2$.

Tracciando la retta bisettrice del piano p_k-p_{k+1} si ottiene l'aggiornamento di p_{k+1} o $\tilde{p}_{k+1}$ a livello grafico.

Il risultato che si ottiene analizzando Φ é che da qualunque punto si parta su $\Phi(p_k)$ si converge a p_∞, cioé il punto in cui $p_k = p_{k+1}$, o in altro modo $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ detto *punto fisso di* Φ, verificando che $p_k \to p_\infty\ \forall p_0 \geq 0$.

In modo analogo si ottiene la convergenza di $\mathcal{L}(k, \tilde{p}_k)$ ad un punto $\tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$ da qualunque punto $\tilde{p}_0 \geq 0$ si parta, ovvero:

$$\tilde{p}_k \to \tilde{p}_\infty \quad \forall \tilde{p}_0 \geq 0 \tag{4.16}$$

Otteniamo che:

1. $\Phi(\cdot)$ é positiva e monotona crescente $\frac{d\Phi}{dP} = \frac{a^2r^2}{(P_k+r)^2} \geq 0$.
2. converganza indipendente da r (per $r = 0$ si ha una retta orizzontale al posto di Φ ma ció non da problemi di convergenza).
3. $p = \Phi(p)$, $p \geq 0$ ha unica soluzione ($q > 0$). Esiste una soluzione unica anche nel caso $p \leq 0$ ma non ha valore rilevante in quest'analisi.
4. se $q > 0 \Rightarrow p_\infty > 0$.
5. l'unico caso anomalo si ha per $q = 0$ in cui ottengo 2 punti di soluzione (a meno che a^2 non sia < 1 e quindi degenera in una soluzione), cioé:

$$q = 0 \begin{cases} a^2 > 1 \quad \text{si ottengono 2 soluzioni} \quad \underbrace{p^1_\infty = 0}_{\text{soluzione instabile}} \quad , \quad \underbrace{p^2_\infty > 0}_{\text{soluzione stabile}} \\ a^2 \leq 1 \quad \text{si ottiene 1 soluzione } p_\infty = 0 \text{ stabile} \end{cases}$$

6. per ogni punto iniziale p_0 si ottengono andamenti di p_k monotoni (crescenti o decrescenti in base al punto iniziale):

$$\{p_k\}_{k=0}^{+\infty} \quad \textit{monotona}$$

7. $\tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$ ha soluzioni se l'inclinazione della retta é inferiore all'unitá:

$$\exists \tilde{p}_\infty > 0 \iff a^2(1-k)^2 < 1$$

8. se $q > 0$, la retta $\mathcal{L}(k, \tilde{p}_k)$, ottenuta usando $k = k_\infty$ dello stimatore di Kalman, incrocia la curva di $\Phi(p_k)$ in p_∞:

$$p_\infty \to k_\infty = \frac{p_\infty}{p_\infty + r}$$

Quindi la soluzione dell'equazione di Riccati $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ implicitamente risolve anche il problema di trovare il guadagno costante ottimo per lo stimatore statico . Infatti, sotto opportune condizioni, il guadagno del filtro di Kalman a regime coincide con il guadagno costante che minimizza $\tilde{p}_\infty$. Inoltre si ottiene, $\tilde{p}_\infty = p_\infty$, cioé riesce a generare la stessa prestazione del filtro di Kalman a regime.

4.3.2 Caso MIMO

Considerando sistemi MIMO (*Multi Input Multi Output*) si possono riassumere le condizioni del caso scalare nel seguente modo:

1. la condizione 1 e 2 del caso scalare sono valide integralmente anche nel caso multivariabile;
2. la condizione 3, 4 e 8 rimangono valide sostituendo la condizione (A, Q) stabilizzabile al posto di $q > 0$;
3. la condizione 5 é valida nel caso gli autovalori siano $|\lambda(A)| < 1$;
4. la condizione 6 non é valida nel caso MIMO, infatti in genere $\Phi(I) \ngeq I$ e $\Phi(I) \nleq I$, dove I e' la matrice identita', e questo rende un po' piu' laboriosa la dimostrazione di convergenza per ogni condizione iniziale $P_0 \geq 0$;
5. la condizione 7 si trasforma in $A(I - KC)$ strettamente stabile, cioe' $|\lambda(A)| < 1$;

4.4 Definizioni e proposizioni generali

Definizione: Una funzione (o operatore o mappa) $\Phi(P) : S \to S$ é *monotonica crescente* se:

$$P_1 \geq P_2 \Rightarrow \Phi(P_1) \geq \Phi(P_2)$$

□

La condizione per l'applicazione del teorema é che in S sia definito un ordinamento.

Si utilizzerá $S = \left\{S \in \mathbb{R}^{n\times n} | S = S^T, S \geq 0\right\}$ rendendo valido l'ordinamento definito per matrici semidefinite positive.

Definizione: Un operatore $\mathcal{L}(P) : S \to S$ é *lineare* se:

$$\mathcal{G}(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \mathcal{G}(P_1) + \alpha_2 \mathcal{G}(P_2)$$

dove α_1, α_2 sono scalari.

□

Definizione: Un operatore $\mathcal{L}(P) : S \to S$ si dice *affine* se $\aleph(P) - \aleph(0)$ é lineare.

$\square$

Esempio: $\mathcal{L}(P) = APA^T + Q$ risulta affine in quanto é un operatore lineare a cui é aggiunta una costante.

Proposizione: Se una successione $\{P_k\}_{k=0}^{+\infty}$ é *monotonica crescente* o *decrescente* si ha che $\lim_{k\to\infty} P_k = P_\infty < \infty$ oppure P_k non é limitata, cioé $\nexists M > 0$ tale che $P_k \le M \forall k$.

$\square$

Proposizione: Se $\Phi(\cdot)$ é monotonica crescente, e valgono le condizioni:

- $P_0 \le \Phi(P_0) = P_1$
- $P_k = \Phi^k(P_0) = \underbrace{\Phi \circ \ldots \circ \Phi}_{k}(P_0)$

allora

$$P_{k+1} \ge P_k \ \forall k$$

Se, invece, vale la condizione $P_0 \ge \Phi(P_0)$ allora

$$P_{k+1} \le P_k$$

$\square$

Proposizione: Se $\{P_k\}$ successione monotonica crescente (decrescente) e limitata, cioé $\exists M | P_k \le M \ \forall k$ $(\exists M | P_k \ge M)$, allora

$$P_k \to P_\infty < \infty$$

$\square$

4.5 Passi di analisi successivi da compiere

Nelle prossime lezioni andremo a dare dimostrazione delle seguenti condizioni:

1. $\mathcal{L}(K, P)$ e $\Phi(P)$ sono monotone crescenti $\forall K$;
2. $\Phi(P) \le \mathcal{L}(K, P) \ \forall P, \forall K$, cioé non posso fare meglio del filtro di Kalman con un filtro stazionario;
3. $\Phi(P) = \mathcal{L}(K_P, P)$ se $K_P = PC^T \left(CPC^T + R\right)^{-1}$;
4. se (A, C) rivelabile $\Rightarrow P_k = \Phi^k(P_0)$, P_k limitato superiormente $\Rightarrow P_k \to P_\infty < \infty$;
5. se $\left(A, Q^{1/2}\right)$ é stabilizzabile $\Rightarrow \exists! P_\infty \ge 0 : P_\infty = \Phi(P_\infty)$, $P_\infty > 0$, $P_k \to P_\infty \ \forall P_0 \ge 0$;
6. se $\left(A, Q^{1/2}\right)$ é stabilizzabile $\tilde{P}_{k+1} = \mathcal{L}\left(K_\infty, \tilde{P}_k\right) \Rightarrow \tilde{P}_{k+1} \to P_\infty$, dove $P_\infty = \Phi(P_\infty)$ e $K_\infty = P_\infty C^T \left(CP_\infty C^T + R\right)^{-1}$.