PSC: Progettazione di sistemi di controllo **III Trim. 2006**

Lezione 5 — Aprile 28

Docente: Luca Schenato *Stesore: Luigi Ricciato, Emanuele Siego*

5.1 Filtro di Kalman a regime

Sia dato il sistema lineare dinamico

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

dove w_k e v_k sono processi i.i.d., tra loro incorrelati, gaussiani a media nulla e varianza rispettivamente Q ed R. Inoltre lo stato iniziale sia

$$x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0) \tag{5.1}$$

Definiamo inoltre, per semplicità di notazione, le seguenti matrici:

$$P_{k+1} := P_{k+1|k} \qquad \tilde{P}_{k+1} := \tilde{P}_{k+1|k}$$

L'equazione a cui soddisfa la varianza dell'errore di stima del *fitlro di Kalman* è

$$P_{k+1} = AP_kA^T + Q - AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T = \Phi(P_k) \tag{5.2}$$

mentre quella relativa a un *filtro statico* con guadagno costante K risulta

$$\tilde{P}_{k+1} = A(I - KC)\tilde{P}_k(I - KC)^TA^T + Q - AKRK^TA^T = \mathcal{L}(K, \tilde{P}_k) \tag{5.3}$$

Si hanno allora le seguenti proposizioni.

Proposizione 5.1. *L'operatore $\mathcal{L}(K, P)$ è monotono crescente.*

Dimostrazione: Prese due matrici P_1 e P_2 tali che $P_1 \geq P_2$, allora risulta che

$$\mathcal{L}(K, P_1) - \mathcal{L}(K, P_2) = A(I - KC)(P_1 - P_2)(I - KC)^TA^T \geq 0$$

poiché per ipotesi $P_1 - P_2 \geq 0$. □

Proposizione 5.2. *Date le matrici K e P semidefinite positive, vale la seguente disuguaglianza*

$$\mathcal{L}(K, P) \geq \Phi(P)$$

dove l'uguaglianza vale solo per $K = K_P = PC^T(CPC^T + R)^{-1}$.

***Dimostrazione*:** Si verifica facilmente per sostituzione che

$$\mathcal{L}(K,P) = \Phi(P) + (K - K_P)(CPC^T + R)(K - K_P)^T$$

e dal fatto che il secondo termine e' sempre semidefinito positivo, segue la tesi. $\square$

Proposizione 5.3. *Data la matrice $P \geq 0$, l'operatore $\Phi(P)$ è monotono crescente.*

***Dimostrazione*:** Prese due matrici semidefinite positive P_1 e P_2 tali che $P_1 \geq P_2$, si ha che

$$\Phi(P_1) = \mathcal{L}(K_{P_1}, P_1) \geq \mathcal{L}(K_{P_1}, P_2) \geq \Phi(P_2)$$

da cui segue per induzione la tesi. $\square$

Proposizione 5.4. *Sia $P_0 = \tilde{P}_0 = 0$. Allora le successioni $\{P_k\}_{k\geq 0}$ e $\{\tilde{P}_k\}_{k\geq 0}$ sono monotone crescenti, quindi ammettono limite. Inoltre si ha che $P_k \leq \tilde{P}_k, \forall k \geq 0$ e $\forall K$.*

***Dimostrazione*:** Dalle ipotesi risulta

$$P_1 = \Phi(P_0) = \Phi(0) = Q \geq 0 = P_0$$

Essendo $P_{k+1} = \Phi(P_k)$ e procedendo per induzione, dalla monotonicità dell'operatore Φ segue subito che

$$P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_k.$$

In modo analogo si dimostra il risultato per la successione $\{\tilde{P}_k\}_{k\geq 0}$ considerato che

$$\tilde{P}_1 = \mathcal{L}(K, \tilde{P}_0) = Q + AKRK^TA^T \geq 0 = \tilde{P}_0.$$

Per ipotesi $P_0 \leq \tilde{P}_0$, per cui per la Proposizione 5.2 si ha che

$$P_1 = \Phi(P_0) \leq \mathcal{L}(K, \tilde{P}_0) = \tilde{P}_1.$$

Per induzione segue la tesi. $\square$

Proposizione 5.5. *Se la coppia (A, C) è rivelabile, allora le successioni $\{P_k\}_{k\geq 0}$ e $\{\tilde{P}_k\}_{k\geq 0}$ sono monotone superiormente limitate e quindi ammettono limite finito.*

***Dimostrazione*:** Dalla Proposizione 5.4 segue che basta verificare che esistono due matrici K ed M di dimensioni opportune tali che

$$\tilde{P}_k \leq M < \infty, \ \forall k \geq 0.$$

Poniamo quindi $A_c := A(I - KC)$ ed $S_{k+1} := A_c S_k A_c^T$. Risulta che ogni elemento l, m della matrice S_k puo' essere scritto come:

$$[S_k]_{lm} = [(A_c)^k S_0 (A_c^T)^k]_{lm} = \sum_i \alpha_i^{lm} \lambda_i^k$$

dove i λ_i sono gli autovalori (modi) di A_c[1].
Si ha quindi che

$$\tilde{P}_k = S_k + \sum_{h=1}^{k} (A_c)^h \mathcal{L}(0)(A_c^T)^h$$

e cioe' ogni elemento della matrice $\tilde{P}_k$ e' la somma di esponenziali i cui coefficenti sono dati dai modi della matrice A_c. Affinché sia $\tilde{P}_k \leq M$, basta che A_c sia stabile. Per l'ipotesi di rivelabilità, esistono infinite matrici K' tali che $(A - K'C)$ è stabile. Resta ora da verificare che tra queste matrici K' ne esista una tale che l'equazione $AK = K'$ ammetta soluzione. Se A è invertibile, la soluzione esiste ed è unica. Se invece A non è invertibile, la dimostrazione e' un po' piu' complessa. In pratica e' possibile dimostrare che se K e' scelta in modo tale da non spostare i modi nulli $\lambda_i = 0$, che ovviamente sono gia stabili, allora $AK = K'$ ha soluzione. □

Tutti i precedenti risultati possono essere riassunti nel seguente importante teorema:

Teorema 5.1. *Se la coppia* $(A, Q^{1/2})$ *è stabilizzabile, allora esiste ed è unica la matrice* $P_\infty > 0$ *tale che* $P_k \to P_\infty$, $\forall P_0 \geq 0$. *Si ha inoltre che* $\Phi(P_\infty) = P_\infty$ *e* $\tilde{P}_{k+1} = \mathcal{L}(K_\infty, \tilde{P}_k) \to P_\infty$, *con* $K_\infty = P_\infty C^T(CP_\infty C^T + R)^{-1}$.

5.2 Stimatore ottimo con perdita di pacchetti

Consideriamo ora il caso in cui le misure devono essere trasmesse attraverso un sistema di comunicazione digitale. A tal proposito, si faccia riferimento allo schema di Fig. 5.1 e si ammetta che la rete di comunicazione possa avere perdite di pacchetti di dati. Vogliamo studiare come si modificano le equazioni del filtro di Kalman in tale evenienza. Possiamo inizialmente pensare a due approcci di gestione della perdita dei dati:

1. utilizzare l'informazione ricevuta al passo precedente per il calcolo della nuova stima

$$y_k^e = \begin{cases} y_k & \text{se il dato è arrivato} \\ y_{k-1}^e & \text{altrimenti} \end{cases}$$

2. mantenere la stima precedente

$$y_k^e = \begin{cases} y_k & \text{se il dato è arrivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove 0 non è indice di misura nulla ma di assenza del dato.

[1] Nel caso gli autovalori non fossero tutti distinti si avrebbero anche modi del tipo $k\lambda_i^k$, ma questo non crea nessun problema all'analisi che segue

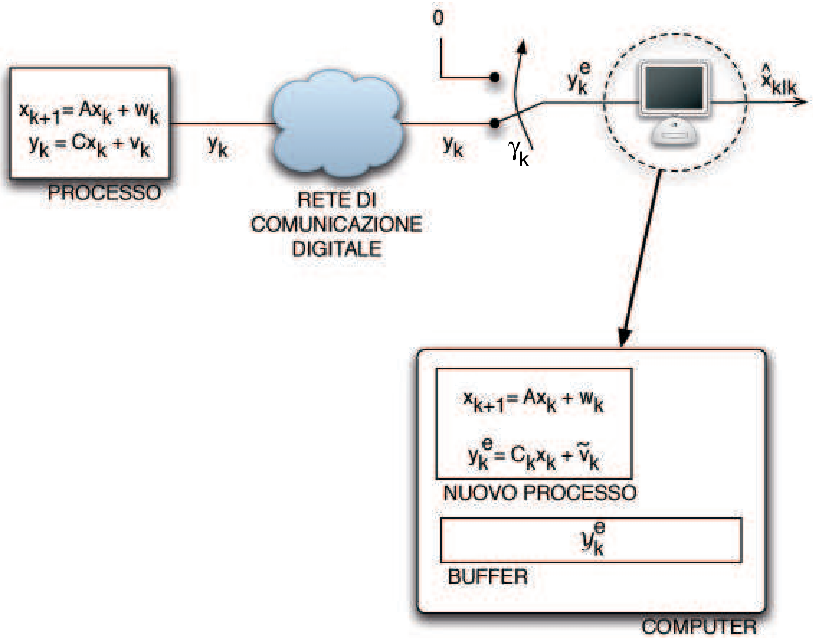

Figura 5.1. Schema generale di trasmissione delle misure attraverso una rete di comunicazione.

Ci limitiamo a considerare il secondo approccio, in quanto dimostreremo essere ottimo, e quindi sicuramente superiore al precedente. A tal scopo definiamo una nuova variabile (nota) γ_k come

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{se il dato è arrivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per cui risulta che

$$y_k^e = \gamma_k y_k = \gamma_k C x_k + \gamma_k v_k = C_k x_k + \tilde{v}_k$$

dove $C_k = \gamma_k C$ e $\tilde{v}_k = \gamma_k v_k \sim \mathcal{N}(0, \gamma_k R)$.
Il nuovo processo da considerare è quindi

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k^e = C_k x_k + \tilde{v}_k \end{cases}$$

il quale è lineare tempo variante.
Le equazioni del filtro diventano le seguenti

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{k+1|k+1} &:= E[x_{k+1}|y^e_{k+1}, \ldots, y^e_0, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_0] \\
&= A\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}(y^e_{k+1} - C_k A\hat{x}_{k|k}) \\
&= A\hat{x}_{k|k} + \gamma_{k+1} K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k}) \\
P_{k+1|k} = P_{k+1} &= AP_kA^T + Q - AP_kC_k^T(C_kP_kC_k^T + \gamma_k R)^\dagger C_kP_kA^T \\
&= AP_kA^T + Q - \gamma_k AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

dove $K_{k+1} = P_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}$. Le equazioni sono state ottenute sostituendo le matrici $C_k = \gamma_k C$ e $R_k = \gamma_k R$ e ricordando che la pseudoinversa di una matrice nulla e' la matrice nulla. Si noti che ora $P_{k+1} = P_{k+1}(\gamma_0, \ldots, \gamma_k)$ non è più deterministica ma è una v.a. che dipende dalla particolare realizzazione del processo $\{\gamma_k\}$ e quindi non ha più senso parlare di convergenza a una costante. Si ha perciò bisogno di definire un qualche criterio per giudicare le prestazioni del sistema.