| PSC: Progettazione di sistemi di controllo | III Trim. 2006 |
|---|---|

# Lezione 6 — Maggio 3

*Docente: Luca Schenato* — *Stesore: Teresa Corlianò, Ilaria Solida*

## 6.1 Considerazioni sul filtro di Kalman

La covarianza d'errore del filtro di Kalman $P_{k+1|k}$, che con un piccolo abuso di notazione indichiamo semplicemente con $P_{k+1}$, soddisfa l'equazione

$$P_{k+1} = AP_kA^T + Q - AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T = \Phi(P_k), \tag{6.1}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- se la coppia $(A, C)$ è rivelabile, allora:
    1. $P_k \to P_\infty < \infty$;
    2. il limite $P_\infty$ non è necessariamente unico, cioè può dipendere dalla particolare condizione iniziale $P_0 \geq 0$.

In tal caso il guadagno del filtro $K_k = P_kC^T\left(CP_kC^T + R\right)^{-1}$ converge al guadagno $K_\infty = P_\infty C^T\left(CP_\infty C^T + R\right)^{-1}$, anch'esso dipendente dalla particolare condizione iniziale $P_0$.

- se, inoltre, la coppia $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ è stabilizzabile, allora:
    1. il limite $P_\infty$ è unico, cioè indipendente dalla condizione iniziale $P_0 \geq 0$ considerata;
    2. $P_\infty$ è una matrice strettamente definita positiva ($P_\infty > 0$);
    3. $P_k$ converge a $P_\infty$ in modo esponenziale, e la velocità di convergenza è data dagli autovalori della matrice $(A - K_\infty C)$.

Naturalmente, in questo caso, anche il limite $K_\infty$ a cui converge il guadagno del filtro è unico (indipendente, cioè, da $P_0$). Sotto queste ipotesi, se si considera la varianza d'errore dello stimatore a guadagno statico con guadagno pari a $K_\infty$

$$\tilde{P}_{k+1} = A(I - K_\infty C)\tilde{P}_k(I - K_\infty C)^TA^T + Q - AK_\infty RK_\infty^TA^T = \mathcal{L}(K_\infty, \tilde{P}_k) \tag{6.2}$$

anch'essa converge a $P_\infty$ per ogni condizione iniziale $\tilde{P}_0 \geq 0$. E' vero quindi che lo stimatore a guadagno statico non è lo stimatore ottimo in quanto risulta $\tilde{P}_k \geq P_k \forall k$, ma per tempi sufficientemente lunghi lo stimatore di Kalman e lo stimatore statico si comportano nello stesso modo.

## 6.2 Prestazione dello stimatore ottimo con perdita di pacchetti

Si consideri ora il seguente contesto: le misure $y_k$ ottenute dal sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

vengono trasmesse attraverso una rete di comunicazione digitale, con la possibile perdita di alcuni pacchetti di dati. Si vuole ricavare l'espressione di uno stimatore sotto queste ipotesi. Lo schema a cui si fa riferimento è rappresentato nella seguente figura.

Sono possibili diversi approcci nell'affrontare la perdita di un pacchetto. Si analizzerà, in

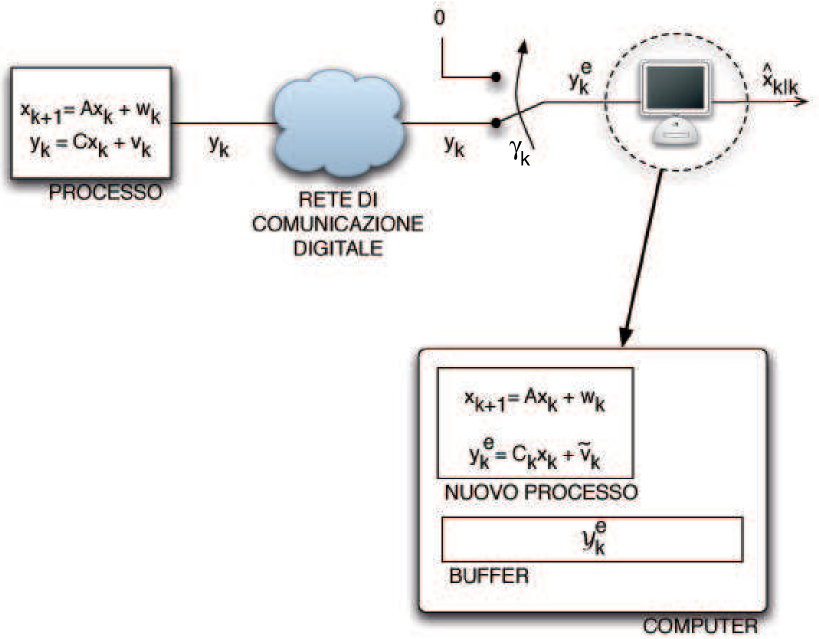


**Figura 6.1.** Schema generale di trasmissione delle misure attraverso una rete di comunicazione.

particolare, il caso in cui nel buffer viene memorizzato

$$y_k^s = \begin{cases} y_k & \text{se il dato è arrivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A tal fine si definisce la variabile binaria $\gamma_k$ come

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{se il dato è arrivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si può scrivere

$$y_k^s = \gamma_k y_k = \gamma_k C x_k + \gamma_k v_k = C_k x_k + \tilde{v}_k$$

con $C_k = \gamma_k C$ e $\tilde{v}_k = \gamma_k v_k \sim \mathcal{N}(0, \gamma_k R)$. A questo punto il sistema si può riscrivere nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + w_k \\ y_k^s = C_k x_k + \tilde{v}_k \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare tempo variante, per il quale è possibile scrivere le equazioni del filtro di Kalman, sostituendo la matrice $C_k = \gamma_k C$ alla matrice $C$ e la matrice $R_k = \gamma_k R$ al posto della matrice $R$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k+1} &:= E[x_{k+1} | y_{k+1}^s, \ldots, y_0^s, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_0] \\ &= A\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}(y_{k+1}^s - C_k A \hat{x}_{k|k}) \\ &= A\hat{x}_{k|k} + \gamma_{k+1} K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k}) \end{aligned} \tag{6.3}$$

dove $K_{k+1} = P_{k+1|k} C^T (C P_{k+1|k} C^T + R)^{-1}$.

$$\begin{aligned} P_{k+1|k} = P_{k+1} &= A P_k A^T + Q - A P_k C_k^T (C_k P_k C_k^T + R_k)^{-1} C_k P_k A^T \\ &= A P_k A^T + Q - \gamma_k A P_k C^T (C P_k C^T + R)^{-1} C P_k A^T \\ &= \Phi_{\gamma_k}(P_k) \end{aligned} \tag{6.4}$$

E' chiaro che se il pacchetto non arriva a destinazione viene a mancare il termine correttivo prodotto dallo stimatore e la varianza dell'errore cresce; se invece il pacchetto arriva viene sottratto un termine e la varianza diminuisce. Il nuovo operatore $\Phi_{\gamma_k}$, che dipende da $P_k$, per $\gamma_k = 1$ coincide esattamente con il filtro di Kalman, mentre per per $\gamma_k = 0$ è paragonabile a ciò che succede in catena aperta. Quando si utilizza lo stimatore ottimo con perdita di pacchetti (fig. 6.2) in base all'arrivo a meno del pacchetto si alterna un operatore stabile ($\Phi_1$) ad un operatore ($\Phi_0$) per il calcolo della covarianza di errore che non necessariamente converge (si pensi al caso in cui la matrice $A$ è instabile).

E' importante osservare che $P_k = P_k(\gamma_0, \ldots, \gamma_k)$; $P_k$ è quindi una variabile stocastica, che dipende dalla particolare realizzazione, e per la quale non ha senso parlare di convergenza nel senso attribuitele precedentemente. Tuttavia è necessario osservare che per calcolare $P_k$ non e' necessario conoscere la statistica del processo $\{\gamma_k\}$, ma solo la sua particolare reliazzazione.

Poiche' la covarianza di errore e' una variabile stocastica, e' necessario definire un criterio in base al quale valutare le prestazioni di questo stimatore. E' importante, a tale scopo, individuare quando lo stimatore è stabile.

Il concetto di stabilità può essere definito in vari modi. Tipicamente si considera uno stimatore stabile se la varianza d'errore è sempre inferiore ad un valore fissato ($P_k < M, \forall k$); in

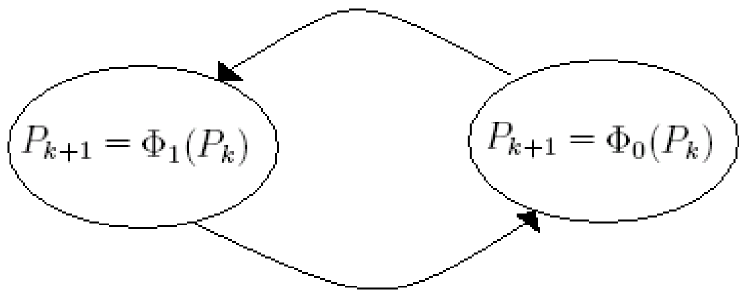


**Figura 6.2.**

alternativa si può considerare come indice di prestazione la media di $P_k$ rispetto al processo $\{\gamma_k\}$, o ancora la quantità $\mathbb{E}_\gamma\left[\|x_k - \hat{x}_k\|^2\right]$, che indica quanto si discosta, in media, la stima dal valore reale. La scelta di uno di questi indici dipende dalla particolare applicazione considerata. Nel caso in esame si farà riferimento alla seguente

**Definizione 6.1.** *Dato un processo $\{\gamma_k\}$ si dice che lo stimatore è stabile in media quadratica se $\mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1|k}\right] < M < \infty$.*

Bisogna quindi di calcolare la quantità $\bar{P}_{k+1} := \mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1|k}\right]$ e verificare se e sotto quali ipotesi risulta limitata. Si considera in particolare il caso in cui il processo $\{\gamma_k\}$ sia un processo di Bernoulli, cioè $\gamma_k \sim \mathcal{B}(\lambda)$. Quindi le variabili $\gamma_k$ sono i.i.d., con $\mathbb{P}\left[\gamma_k = 1\right] = \lambda \in [0, 1]$. In base all'espressione di $P_{k+1|k}$ in 6.4 si calcola

$$\bar{P}_{k+1} := \mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1}\right] = A\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]A^T + Q - \mathbb{E}_\gamma\left[\gamma_k g(P_k)\right] \tag{6.5}$$

con $g(P_k) = AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T$. Poichè $\{\gamma_k\}$ è indipendente da $P_k$ e quindi da $g(P_k)$ l'aspettazione del prodotto è pari al prodotto delle aspettazioni. Si ha perciò:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &= A\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]A^T + Q - \mathbb{E}_\gamma\left[\gamma_k\right]\mathbb{E}_\gamma\left[g(P_k)\right] \\ &= A\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]A^T + Q - \lambda\mathbb{E}_\gamma\left[g(P_k)\right] \end{aligned} \tag{6.6}$$

Non è possibile ricavare $\bar{P}_{k+1}$ in maniera esplicita perchè $g(P_k)$ è una funzione non lineare di $P_k$, quindi in genere $\mathbb{E}_\gamma[g(P_k)] \neq g\left(\mathbb{E}_\gamma[P_k]\right)$. Si può comunque determinare se lo stimatore è stabile in media quadratica oppure no in maniera indiretta andando a studiare la stabilità di un filtro con guadagno statico. Si considera cioé il seguente filtro:

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K(y_{k+1} - C_k A\tilde{x}_{k|k})$$

con varianza d'errore

$$\tilde{P}_{k+1|k} := \tilde{P}_{k+1} = \mathbb{E}\left[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})^T | y_k^s, \ldots, y_0^s, \gamma_k, \ldots, \gamma_0\right].$$

Anche $\tilde{P}_k$ risulta funzione dei vari $\gamma_k$, cioé $\tilde{P}_k = \tilde{P}_k(\gamma_{k-1}, \ldots, \gamma_0)$. Si tratta, perciò, di una variabile stocastica tempo variante. Il nuovo stimatore non è ottimo per cui vale la relazione

$$P_{k+1} \leq \tilde{P}_{k+1} \tag{6.7}$$

e la stessa relazione vale anche se si considera l'aspettazione rispetto al processo $\{\gamma_k\}$. Si ha cioé

$$\mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1}\right] \leq \mathbb{E}_\gamma\left[\tilde{P}_{k+1}\right] \tag{6.8}$$

Se si riesce a calcolare in maniera esplicita $\mathbb{E}_\gamma\left[\tilde{P}_{k+1}\right] := \breve{P}_{k+1}$, e si dimostra che $\breve{P}_{k+1}$ è limitata ($\breve{P}_{k+1} < M$) allora si può affermare che lo stimatore ottimo è stabile perchè vale

$$\bar{P}_{k+1} = \mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1}\right] \leq \mathbb{E}_\gamma\left[\tilde{P}_{k+1}\right] = \breve{P}_{k+1} < M \tag{6.9}$$