

8.1 Stimatore ottimo con perdita di pacchetti e ritardo nell'arrivo

8.1.1 Stimatore tempo variante

Come visto, nella trasmissione di dati attraverso una rete digitale alcuni pacchetti vengono persi. Oltre alla perdita di dati si può verificare un ritardo casuale nell'arrivo dei pacchetti.

Se il dato y_k^t , dove k è l'istante in cui viene spedito e t il tempo corrente, viene ricevuto



Figura 8.1. Rete digitale per la trasmissione di dati

questo viene salvato in un buffer (figura (8.1)) nel posto giusto cioè nella posizione k -esima. Se il dato invece non arriva nella posizione k -esima viene inserito uno zero. In questo caso si può ridefinire la funzione *gamma* come segue:

$$\gamma_k^t = \begin{cases} 1 & \text{se il dato è arrivato entro } t, k \leq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (8.1)$$

Data questa funzione si può riscrivere il modello di stato :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ \tilde{y}_k^t = \gamma_k^t Cx_k + \gamma_k^t v_k = \tilde{C}_k^t x_k + \tilde{v}_k^t \end{cases} \quad k=1, \dots, t \quad (8.2)$$

con

$$\begin{aligned} x_0 &\sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0) \\ w_k &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ \tilde{v}_k^t &\sim \mathcal{N}(0, \gamma_k^t R) \\ R > 0 &\quad Q \geq 0 \end{aligned}$$

Ora ad ogni passo t oltre al possibile dato inviato all'istante t stesso possono arrivare nuovi dati spediti negli istanti precedenti.

Per trovare quindi la stima $\hat{x}_{t|t}$ ad ogni passo bisogna ricominciare il calcolo dall'istante iniziale fino all'istante t . Quindi definendo le seguenti variabili:

$$\hat{x}_{k|h}^t \triangleq \mathbb{E}[x_k | \gamma_h^t, \dots, \gamma_1^t, \tilde{y}_h^t, \dots, \tilde{y}_1^t, \bar{x}_0, P_0] \quad (8.3)$$

$$P_{k|h}^t \triangleq \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|h}^t)(x_k - \hat{x}_{k|h}^t)^T | \gamma_h^t, \dots, \gamma_1^t, \tilde{y}_h^t, \dots, \tilde{y}_1^t, \bar{x}_0, P_0] \quad (8.4)$$

si ottiene lo stimatore ottimo

$$P_{k+1|k}^t = AP_{k|k-1}^t A^T + Q - \gamma_k^t AK_k^t CP_{k|k-1}^t A^T = \phi_{\gamma_k}(P_{k|k-1}^t) \quad (8.5)$$

$$\text{con } P_{0|-1}^t = P_0$$

$$K_{k+1}^t = P_{k+1|k}^t C^T (CP_{k+1|k}^t C^T + R)^{-1} \quad (8.6)$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1}^t = A\hat{x}_{k|k}^t + \gamma_{k+1}^t K_{k+1}^t (\tilde{y}_{k+1}^t - CA\hat{x}_{k|k}^t) \quad k = 1, \dots, t \quad (8.7)$$

$$\text{con } \hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0$$

Questo metodo comporta l'inversione di t matrici ad ogni passo, quelle utilizzate per il calcolo della K_k^t , e perciò una complessità computazionale molto elevata.

8.1.2 Stimatore tempo variante con buffer finito

Come detto il fatto di ricalcolare ogni volta le matrici partendo da x_0 e P_0 dà una complessità di calcolo alta perchè bisogna invertire ogni volta t matrici.

Quando si può implementare la cosa in maniera più efficiente?

Un miglioramento delle prestazioni si può avere se vale la seguente eguaglianza:

$$\gamma_k^t = \gamma_k^{t-1} \quad \forall k, \quad \forall t \geq k + N \quad (8.8)$$

cioè oltre un ritardo massimo N il valore della variabile γ non cambia più, in parole povere i pacchetti arrivano con un ritardo massimo N oltre il quale non arrivano più.

Di conseguenza si ha che lo stato stimato al tempo t è uguale a quello al tempo $t-1$ visto che

non sono arrivati nuovi pacchetti, cioè si ha che:

$$\hat{x}_{k|k}^t = \hat{x}_{k|k}^{t-1} \quad \forall k, \quad \forall t \geq k + N \quad (8.9)$$

$$P_{k+1|k}^t = P_{k|k-1}^{t-1} \quad (8.10)$$

In questo caso perciò si può utilizzare un buffer di N elementi (figura (8.2)), inoltre non si

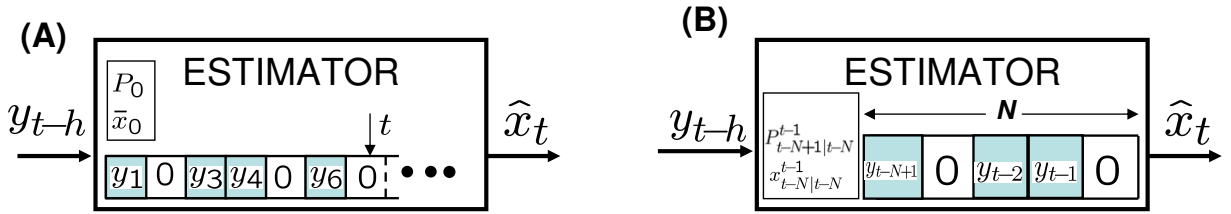


Figura 8.2. Rete digitale per la trasmissione di dati

devono più invertire t matrici ma solamente N e come dati iniziali si hanno non più P_0 e $\bar{x}_0$ ma $P_{t-N|t-N}^t$ e $\hat{x}_{t-N|t-N}^t$.

L'equazioni dello stimatore ottimo risultano quindi essere:

$$\begin{aligned} P_{t-k+1|t-k}^{t+1} &= AP_{t-k|t-k-1}^{t+1}A^T + Q - \gamma_{t-k}^{t+1}AK_{t-k}^{t+1}CP_{t-k|t-k-1}^{t+1}A^T = \\ &= \phi_{\gamma_{t-k}}(P_{t-k|t-k-1}^{t+1}) \quad k = N, \dots, 0 \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} \text{con } P_0^{t+1} &= P_{t-N+1|t-N}^t \\ K_{t-k+1}^{t+1} &= P_{t-k+1|t-k}^{t+1}C^T(CP_{t-k+1|t-k}^{t+1}C^T + R)^{-1} \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t-k+1|t-k+1}^{t+1} &= A\hat{x}_{t-k|t-k}^{t+1} + \gamma_{t-k+1}^{t+1}K_{t-k+1}^{t+1}(\tilde{y}_{t-k+1}^{t+1} - CA\hat{x}_{t-k|t-k}^{t+1}) \\ \text{con } \hat{x}_{0|0}^{t+1} &= \hat{x}_{t-N+1|t-N+1}^t \end{aligned} \quad (8.13)$$

Lo stimatore definito dalle equazioni e' ottimo a prescindere dalle statistiche di arrivo dei pacchetti, ma solamente dalla particolare realizzazione avuta fino all'istante t .

Ovviamente la prestazione del sistema dipende dalle statistiche di arrivo dei pacchetti. Se queste sono note si puo' appunto pensare di calcolare *off-line* delle stime di prestazione medie. L'aspettazione della prestazione dello stimatore $\mathbb{E}[P_{t+1|t}^t]$ e' in genere non facilmente calcolabile, tuttavia e' possibile ottenere dei limiti superiori tramite la prestazione di un filtro con guadagni costanti descritto nella prossima sezione, in modo simile a quello che era stato fatto nel caso del modello con ritardo nullo ma perdita di pacchetti secondo un processo di Bernulli.

8.1.3 Stimatore ottimo con guadagni costanti

Nel caso in cui le statistiche di γ_h^t siano stazionarie e i.i.d, si utilizza la funzione di probabilità λ_h definita come

$$\lambda_h \triangleq \mathbb{P}[\tau_k \leq h] \quad h = 1, \dots, N$$

dove τ_k è il ritardo del pacchetto k-esimo.

In figura (8.3) è riportato un esempio dell'andamento della λ_h in funzione del ritardo h .

Dal grafico si vede che ovviamente dopo N passi la λ_h rimane costante e non arriva mai a

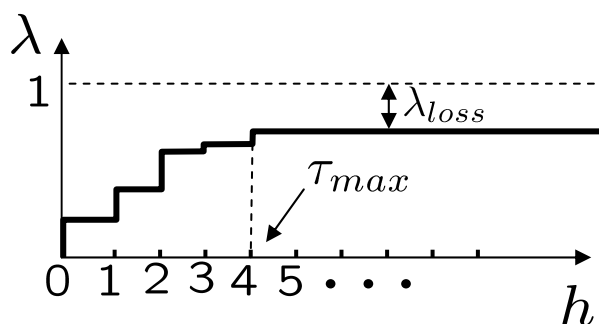


Figura 8.3. Esempio della funzione di probabilità al variare dell'istante h

uno, questo significa che c'è una probabilità di perdita del pacchetto data da:

$$\lambda_{loss} \triangleq \mathbb{P}[\tau_k = \infty] = 1 - \sup\{\lambda_h | h \geq 0\}$$

Anche avendo un buffer limitato di N elementi può succedere che sia ancora troppo oneroso l'inversione delle matrici per il calcolo della K_{k-N+1}^t . Per ovviare a questo problema si possono utilizzare delle matrici K_k costanti con $k = N, \dots, 0$, cioè con la matrice K che varia in base alla posizione che occupa nel buffer.

Le nuove equazioni dello stimatore sono quindi:

$$\begin{aligned} P_{t-k+1|t-k}^{t+1} &= AP_{t-k|t-k-1}^{t+1}A^T + Q - \gamma_{t-k+1}^t AK_k CP_{t-k|t-k-1}^{t+1}A^T = \\ &= \phi_{\gamma_{k-N}}(P_{k-N|k-N-1}^{t+1}) \quad k = N, \dots, 0 \end{aligned} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \text{con } P_0^{t+1} &= P_{t-N+1|t-N}^t \\ \hat{x}_{t-k+1|t-k+1}^{t+1} &= A\hat{x}_{t-k|t-k}^{t+1} + \gamma_{t-k+1}^t K_k (\tilde{y}_{t-k+1}^{t+1} - CA\hat{x}_{t-k|t-k}^{t+1}) \\ \text{con } \hat{x}_{0|0}^{t+1} &= \hat{x}_{t-N+1|t-N+1}^t \end{aligned} \quad (8.15)$$

Per trovare i K_k ottimi bisogna prima risolvere la seguente equazione:

$$S_{\infty}^N = \phi_{\lambda_N}(S_{\infty}^N) \quad \Rightarrow \quad K_{\infty}^N = CS_{\infty}^N(CS_{\infty}^N C^T + R)^{-1}$$

e poi applicare le iterazioni

$$\begin{aligned}
 S_{\infty}^{N-1} &= \phi_{\lambda_{N-1}}(S_{\infty}^N) &\Rightarrow & K_{\infty}^{N-1} = CS_{\infty}^{N-1}(CS_{\infty}^{N-1}C^T + R)^{-1} \\
 S_{\infty}^{N-2} &= \phi_{\lambda_{N-2}}(S_{\infty}^{N-1}) &\Rightarrow & K_{\infty}^{N-2} = CS_{\infty}^{N-2}(CS_{\infty}^{N-2}C^T + R)^{-1} \\
 &\vdots && \\
 S_{\infty}^0 &= \phi_{\lambda_0}(S_{\infty}^{-1}) &\Rightarrow & K_{\infty}^0 = CS_{\infty}^0(CS_{\infty}^0C^T + R)^{-1}
 \end{aligned}$$

8.2 Stimatori con ingressi

Nel caso di un sistema con ingressi il modello di stato puo' essere scritto come segue:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k & k=1, \dots, t \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases} \quad (8.16)$$

$$\quad (8.17)$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &\sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0) \\
 w_k &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\
 v_k &\sim \mathcal{N}(0, R) \\
 R > 0 &\quad Q \geq 0
 \end{aligned}$$

La stima dello stato x e la varianza d'errore di stima devono perciò essere ridefinite come segue:

$$\hat{x}_{k|h} \triangleq \mathbb{E}[x_k | y_1, \dots, y_h, u_1, \dots, u_h] \quad \text{con} \quad k \geq h \quad (8.18)$$

$$P_{k|h} \triangleq \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|h})(x_k - \hat{x}_{k|h})^T | y_1, \dots, y_h, u_1, \dots, u_h] \quad (8.19)$$

Lo stimatore ottimo quindi risulta essere

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = A\hat{x}_{k|k} + Bu_k + K_{k+1}(y_k + 1 - CA\hat{x}_{k|k}) \quad (8.20)$$

Dove le matrici $P_{k|k}$ e K_k sono calcolate allo stesso modo visto per un sistema senza ingressi. Le cose importanti di cui tenere conto sono due:

1. La covarianza d'errore dello stimatore e' indipendente da $\{u_1, \dots, u_k\}$
2. Si presuppone la conoscenza degli $\{u_k\}$ passati