

Lezione 11 — Maggio 17

Docente: Luca Schenato

Stesori: L. Ricciato, E. Siego, I. Solida, T. Corliano

11.1 Controllo ottimo LQG

Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\tag{11.1}$$

dove $w_k \sim N(0, Q)$ e $v_k \sim N(0, R)$ sono rispettivamente gli errori di modello e di uscita. Sia inoltre

$$J_T = E\left[\sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T W x_k + u_k^T U u_k) + x_T^T W_T x_T\right]\tag{11.2}$$

la funzione costo, con W, U, W_T matrici quadrate semidefinite positive.

Il problema consiste nella scelta degli ingressi u_k che rendono minimo il funzionale J_T , ovvero:

$$J_T^*(x_0) = \min_{u_k} J_T(x_0, u_0, \dots, u_{T-1})\tag{11.3}$$

Si dimostra che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned}J_T^*(x_0) &= E[x_0^T S_0 x_0] + \sum_{k=0}^{T-1} (tr(S_{k+1} Q) + tr((A^T S_{k+1} A + W - S_k) P_{k|k})) \\ S_k &= A^T S_{k+1} A + W - A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A \\ S_T &= W_T \\ P_{k|k} &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R)^{-1} C P_{k|k-1} A^T \\ P_{k+1|k} &= A P_{k|k-1} A^T + Q - A P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R)^{-1} C P_{k|k-1} A^T \\ u_k^* &= L_k \hat{x}_{k|k} \quad , \quad L_k = -(B^T S_k B + U)^{-1} B S_k A \\ \hat{x}_{k+1|k+1} &= A \hat{x}_{k|k} + B u_k + K_{k+1} (y_{k+1} - C A \hat{x}_{k|k})\end{aligned}\tag{11.4}$$

In definitiva per il controllo ottimo LQG vale il principio di separazione, nel senso che si può scindere il problema in due sotto problemi, rispettivamente la risoluzione di un classico controllo LQ e di un filtro di Kalman. Naturalmente le matrici L_k e K_k sono tempo-varianti.

Sotto opportune ipotesi di controllabilità e di rivelabilità delle matrici del sistema valgono le seguenti proprietà di convergenza:

$$\begin{aligned}
 J_\infty^* &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_T^* = \lim_{k \rightarrow \infty} E[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k] \\
 &= \text{tr}((AS_\infty A^T + W - S_\infty)P_\infty) \\
 S_k &\rightarrow S_\infty \\
 L_k &\rightarrow L_\infty \\
 P_{k|k} &\rightarrow P_\infty \\
 K_k &\rightarrow K_\infty
 \end{aligned} \tag{11.5}$$

In tal caso a regime otteniamo il sistema lineare tempo-invariante:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{k+1|k+1} &= A\hat{x}_{k|k} + Bu_k + K_\infty(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k}) \\
 u_k &= L_\infty \hat{x}_{k|k}
 \end{aligned} \tag{11.6}$$

11.2 Controllo in feed forward e controllo in retroazione

Ci si potrebbe chiedere come mai nell'ambito dei controlli sia così diffusa la tecnica del controllo in retroazione (detto anche controllo in catena chiusa); si cercherà di chiarirlo considerando un semplicissimo sistema:

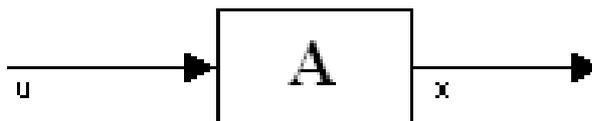


Figura 11.1.

con $A \in \mathbb{R}$, $u(t)$ ingresso di controllo, $x(t)$ stato del sistema.

Sia $r(t)$ il segnale di riferimento da inseguire, nello specifico un gradino unitario applicato all'istante zero.

Come si può scegliere il segnale di controllo $u(t)$ affinché lo stato del sistema inseguia il riferimento, cioè affinché sia $x(t) = r(t)$? Una scelta immediata e abbastanza semplice consiste nel porre:

$$u_{ff}(t) = \frac{1}{A}r(t) \tag{11.7}$$

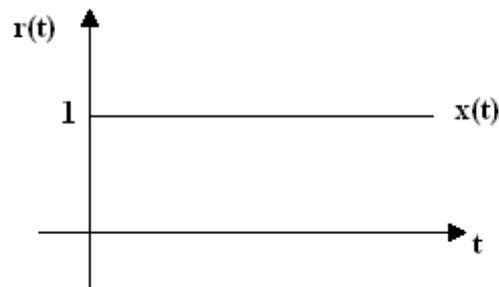


Figura 11.2.

Con l'applicazione di questo ingresso di controllo, che viene detto Controllo in feed forward o in catena aperta, l'obiettivo è perfettamente raggiunto:

Ma questo approccio non è sempre la soluzione migliore, e comporta una serie di rischi;

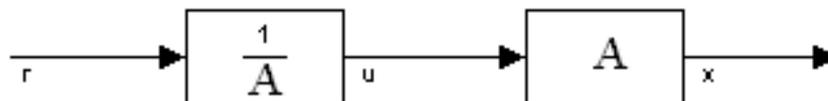


Figura 11.3.

primo fra tutti che il modello a disposizione non descriva esattamente quello reale, ma se ne discosti di una quantità pari a Δ .

In questo caso la funzione di trasferimento tra $x(t)$ e $r(t)$ diventa:

$$x(t) = \frac{A + \Delta}{A} r(t) = \left(1 + \frac{\Delta}{A}\right) r(t) \quad (11.8)$$

Da questa incertezza sul modello deriva un errore sull'inseguimento della traiettoria, mostrato in figura:

Ecco perchè quello che si segue solitamente è l'approccio del controllo in retroazione (o controllo in catena chiusa): si considera istante per istante l'errore tra l'uscita del sistema e

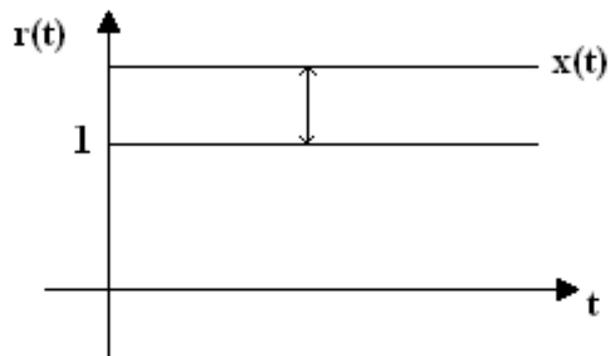


Figura 11.4.

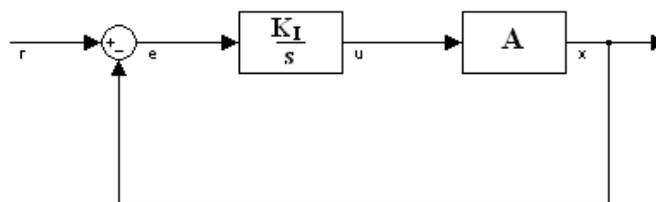


Figura 11.5.

il riferimento e , in questo esempio specifico, lo si corregge tramite un integratore.

$$u_{fb}(t) = \frac{K_I}{s}(r(t) - x(t)) \quad (11.9)$$

La funzione di trasferimento tra $x(t)$ e $r(t)$, nel dominio della trasformata di Laplace, diventa:

$$X(s) = \frac{\frac{K_I A}{s}}{1 + \frac{K_I A}{s}} R(s) = \frac{1}{\tau_A s + 1} R(s) \quad (11.10)$$

con $\tau_A = \frac{1}{K_I A}$.

L'uscita del sistema all'applicazione del solito gradino unitario è quella rappresentata in figura:

con una prontezza che è proporzionale a τ_A .

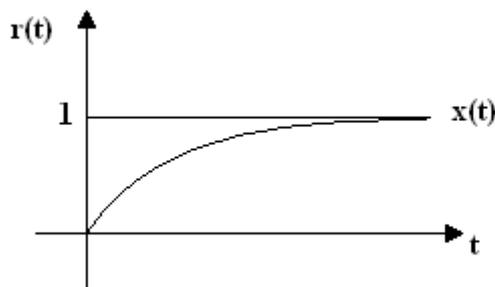


Figura 11.6.

Con la tecnica del controllo in retroazione, in presenza di incertezze sul modello, ciò che varia è solo la velocità con cui l'uscita del sistema raggiunge il riferimento, ma esso verrà in ogni caso raggiunto. La tecnica del controllo in retroazione, quindi, permette di compensare eventuali incertezze sul modello, presentando un unico svantaggio, la lentezza, rispetto al controllo in feed forward (che è invece immediato). Sembrerebbe, allora, che il controllo in retroazione sia sempre la soluzione migliore da adottare; ma non è sempre così. In riferimento al solito esempio, si consideri il seguente schema:

L'ingresso di controllo questa volta è la somma di due contributi:

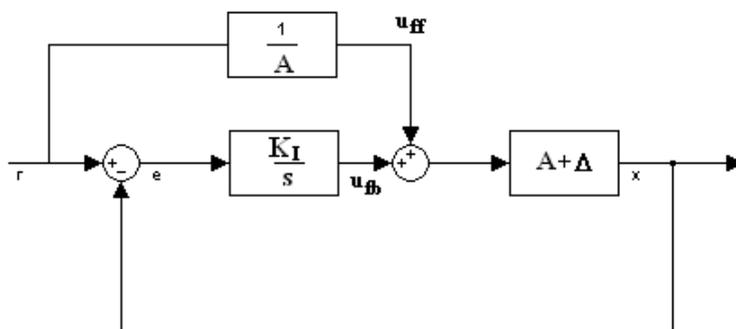


Figura 11.7.

$$u(t) = u_{ff}(t) + u_{fb}(t) \quad (11.11)$$

Il sistema, con una certa incertezza sul modello, come si comporterà all'applicazione del gradino unitario? Se ci fosse solo il controllo in catena aperta si avrebbe un errore a regime; se ci fosse solo il controllo in retroazione (partendo da una condizione iniziale più lontana rispetto al riferimento) si avrebbe una risposta più lenta.

L'idea, quindi, è che il controllo ottimo sia una combinazione di controllo in retroazione e di

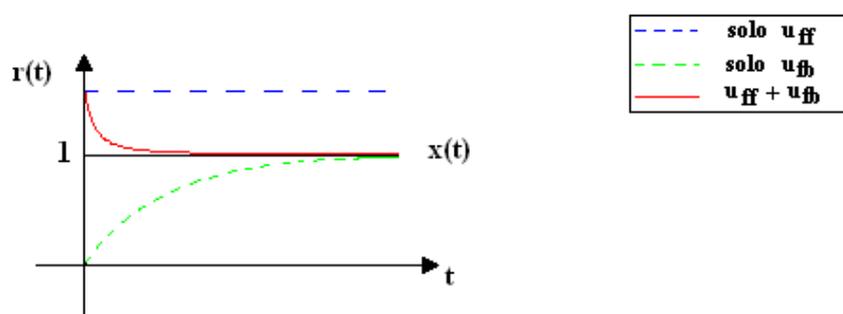


Figura 11.8.

controllo in catena aperta. Quest'ultimo, riguardando in un certo senso 'il futuro' permette di ottimizzare la prestazione; quello in catena chiusa, riguardando 'il passato', permette di compensare errori o disturbi imprevisi. Si vedrà come nell'ambito dei sistemi anolonomi realizzare anche solo il controllo in catena aperta presenta notevoli difficoltà.

11.3 Classificazione dei sistemi anolonomi

I sistemi anolonomi appartengono alla più ampia classe dei sistemi non lineari:

$$\dot{q} = f(q, u),$$

in cui $q \in \mathbb{R}^n$ rappresenta il vettore di stato, $u \in \mathbb{R}^m$ il vettore degli ingressi ed f è una funzione non lineare.

In particolare, i sistemi anolonomi sono sistemi non lineari caratterizzati da vincoli del tipo:

$$b_i(q, \dot{q}) = 0 \quad (11.12)$$

con $b_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$.

Si consideri, a tal proposito, il sistema

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = u \\ \dot{q}_2 = u^3 \end{cases}$$

per il quale risulta $\dot{q}_2 - (\dot{q}_1)^3 = 0$. Tale vincolo è del tipo espresso in 11.12, per cui il sistema considerato è un sistema anolonomo.

Una particolare classe dei sistemi anolonomi è rappresentata dai sistemi soggetti a vincoli *pfaffiani*. Tali vincoli sono del tipo:

$$a_i^T(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad (11.13)$$

con $a_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$. Si consideri, ad esempio, una ruota che non può slittare e che quindi può muoversi solo lungo una prefissata direzione, come rappresentato in fig. Se

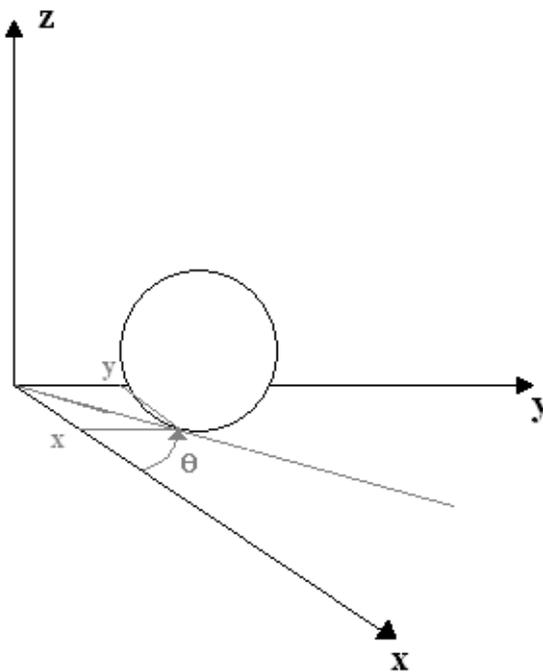


Figura 11.9.

si indica con (x, y) il punto di contatto tra la ruota e il piano x-y, la condizione di assenza di slittamento risulta essere:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan(\vartheta)$$

o, equivalentemente

$$\dot{y} \cos \vartheta - \dot{x} \sin \vartheta = 0$$

Considerando, allora, come stato del sistema il vettore

$$q = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix},$$

la precedente equazione si può scrivere come

$$\begin{bmatrix} -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = a_1^T \cdot \dot{q} = 0,$$

cioè il vincolo è di tipo pfaffiano.

I vincoli di tipo pfaffiano sono quelli che derivano dal movimento di ruote (in assenza di slittamento) e dalla conservazione del momento angolare.

Esistono due sottoclassi dei sistemi anolonomi con vincoli pfaffiani: i sistemi *senza drift* e i sistemi *con drift*. I sistemi senza drift sono descritti da un'equazione del tipo:

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m,$$

con $u_i \in \mathbb{R}$ e $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$. Naturalmente, per qualche combinazione degli ingressi risulta $\dot{q} = 0$ il sistema non si sposta dallo stato attuale. Per tale ragione questi sistemi vengono chiamati senza drift, cioè senza movimento. I sistemi con drift sono invece rappresentati dalla seguente equazione:

$$\dot{q} = f(q) + g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m.$$

Si può dimostrare che ogni sistema non lineare è rappresentabile come un sistema con drift. Dato, infatti, il generico sistema $\dot{x} = f(x, u)$ è possibile introdurre la nuova variabile di stato:

$$q = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix},$$

con $v = u$. Si può scrivere quindi:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} f(x, v) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v,$$

ed il sistema così ottenuto è un sistema con drift. I sistemi senza drift possono essere a loro volta distinti in sistemi del primo ordine e sistemi in catena. I primi sono rappresentabili nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u \\ \dot{Y} &= q \cdot u^T - u \cdot q^T \end{aligned}$$

con $Y \in SO(m)$; i secondi, invece, sono descritti dalla seguente equazione:

$$\dot{q} = g_1 \cdot u_1 + g_2 \cdot u_2$$

in cui

$$g_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

e

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lo schema in fig. riassume la classificazione dei sistemi anolonomi descritta.

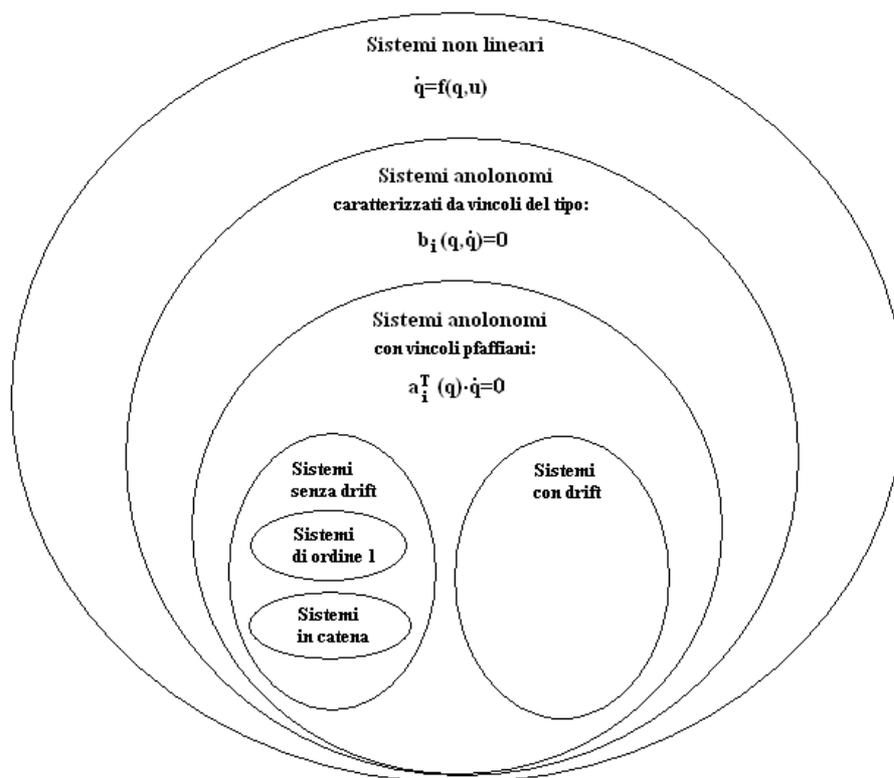


Figura 11.10.