

Lezione 18 — Giugno 2006

Docente: Luca Schenato

Stesore: Mirko Bordignon, Daniele Tamino

18.1 Utilizzazione pratica del teorema di Frobenius

Vediamo ora alcuni possibili modi per utilizzare il teorema di Frobenius al fine di ricavare risultati utili a problemi di coordinazione tra agenti mobili e/o sensori.

Ricordiamo che, interpretando i vertici come i veicoli che vogliamo controllare e gli archi come collegamenti (eventualmente wireless) tra gli stessi, la matrice di adiacenza K indica quanti (e quali) veicoli possono scambiarsi informazioni in 1 passo; analogamente, K^2 ci dice quanti possono farlo in 2 passi, e, per estensione, K^n indica la connettività in n passi. L'evoluzione della matrice di adiacenza mostra quindi come la connettività evolve nel tempo.

Riassumendo la notazione usata per indicare il sistema di veicoli oggetto dello studio, ricordiamo che la dinamica di ogni veicolo i è descritta dal singolo integratore a tempo discreto con ingressi complessi

$$z_i(t+1) = z_i(t) + u_i(t)$$

e, stante che l'ingresso di controllo è definito come $u(t) = Kz(t)$, possiamo riscrivere la dinamica del singolo veicolo come

$$z_i(t+1) = (I + K)z_i(t) = Pz_i(t)$$

Associamo quindi a P un grafo di comunicazione $G_P = (V_P, E_P)$ con le modalità viste sopra: i vertici $V_P = \{1, \dots, N\}$ rappresentano gli n veicoli, mentre gli archi $E_P = \{(i, j) : p_{ij} \neq 0\}$ rappresentano la connettività in 1 passo; ci chiediamo a questo punto di quanto possiamo impoverire il grafo di comunicazione (ovvero quanti elementi possiamo mettere a zero nelle matrici K e di conseguenza P) pur mantenendo la solubilità del problema del rendez-vous. L'ipotesi fondamentale, anche se sufficiente ma non necessaria (ma che per semplicità ci limitiamo a considerare), è che il grafo G_P sia fortemente connesso; formalmente:

Teorema 18.1. *Il problema del rendez-vous è risolubile se:*

- G_P è fortemente connesso
- $P \geq 0$ e stocastica
- $p_{ii} > 0 \forall i$

Dimostrazione: dalle tre condizioni poste, possiamo affermare che $\exists n : P^n > 0$, e poniamo $P^n = A$; dato che $P1 = 1$ (per la def. di P stocastica), anche $A1 = 1$, inoltre $P1 = 1 \Rightarrow \rho(P^n) = 1$. Quindi $\lim_{k \rightarrow \infty} P^{nk} = 1y^T$, con $y : y^T 1 = 1$, e ricordando che $z(t) = P^t z(0)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 1y^T z(0)$, con $y^T z(0) = \alpha$ (riprendendo la notazione usata per il teorema di Frobenius). \square

Notiamo che α è una funzione lineare delle condizioni iniziali i cui coefficienti sono dati dall'autovalore sinistro, e che se volessimo che i veicoli finissero esattamente nel baricentro delle condizioni iniziali $\alpha = \frac{1}{N} \sum z_i(0) = \frac{1}{N} [1 \dots 1] z(0)$ dovremmo avere $1^T P = 1^T$, ovvero P matrice doppiamente stocastica.

Un altro esempio di utilizzo è la rilevazione in modo decentralizzato della media delle letture di un insieme di sensori distribuiti in un ambiente; indicando con t_1, \dots, t_N le misure degli N sensori, con $m = \frac{1}{N} \sum_i t_i$ la media, con $\hat{x}_i(t)$ la stima che il sensore i ha della media, le condizioni iniziali prevedono ovviamente che $\hat{x}_i(0) = t_i$, mentre per l'aggiornamento abbiamo $\hat{x}_i(t+1) = \sum p_{ij} x_j(t)$; se P è doppiamente stocastica, G_P è fortemente connesso e $p_{ii} > 0$, allora $\hat{x}_i(t)$ converge ad m .

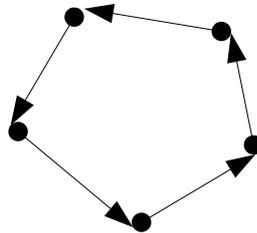


Figura 18.1. Esempio di grafo circolante con 5 nodi.

18.2 Esempi di applicazioni

Vedremo ora alcuni esempi di applicazioni, del teorema 18.1, ovvero:

1. Soluzione al problema del rendez-vous utilizzando un grafo circolante;
2. Possibili alternative al grafo circolante, per migliorare la velocità di convergenza;
3. Disposizione dei veicoli in formazione;
4. Allineamento dei veicoli lungo una retta.

18.2.1 Rendez-vous con grafo circolante

Un grafo circolante è un grafo in cui ciascun nodo ha un arco uscente verso il nodo successivo, e uno entrante dal nodo precedente, e l'ultimo nodo è collegato al primo (figura 18.1).

Un grafo di questo tipo è fortemente connesso, ma presenta un numero minimo di archi. La matrice P risulta

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & \ddots & \\ \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

che come si vede facilmente, è doppiamente stocastica (la somma di tutte le righe e colonne da sempre 1) e la diagonale non è mai nulla, quindi le condizioni del teorema 18.1 sono soddisfatte.

Come si nota in figura ..., con pochi veicoli il sistema converge dopo circa XYZ passi, mentre con un numero elevato di veicoli, la convergenza è piuttosto lenta.

La velocità di convergenza è data principalmente dalla distanza tra l'autovalore dominante e quello a esso più vicino, e osservando la disposizione degli autovalori della matrice P per $n = 10$ (figura 18.3), si vede che sono disposti lungo la circonferenza di centro $1/2$ e raggio $1/2$, in particolare l'autovalore dominante è quello per $\lambda = 1$. Aumentando n , gli autovalori si dispongono più vicini l'uno all'altro, e la velocità di convergenza diminuisce.

18.2.2 Migliorare la convergenza nel rendez-vous

Osservando la disposizione dei veicoli nel tempo, utilizzando un programma di simulazione quale MATLAB, si può facilmente vedere che inizialmente, costruendo il grafo circolante in modo casuale, i veicoli collegati da archi sono distanti fra loro, ma tendono ad avvicinarsi. Più sono vicini, e più lentamente convergono al baricentro.

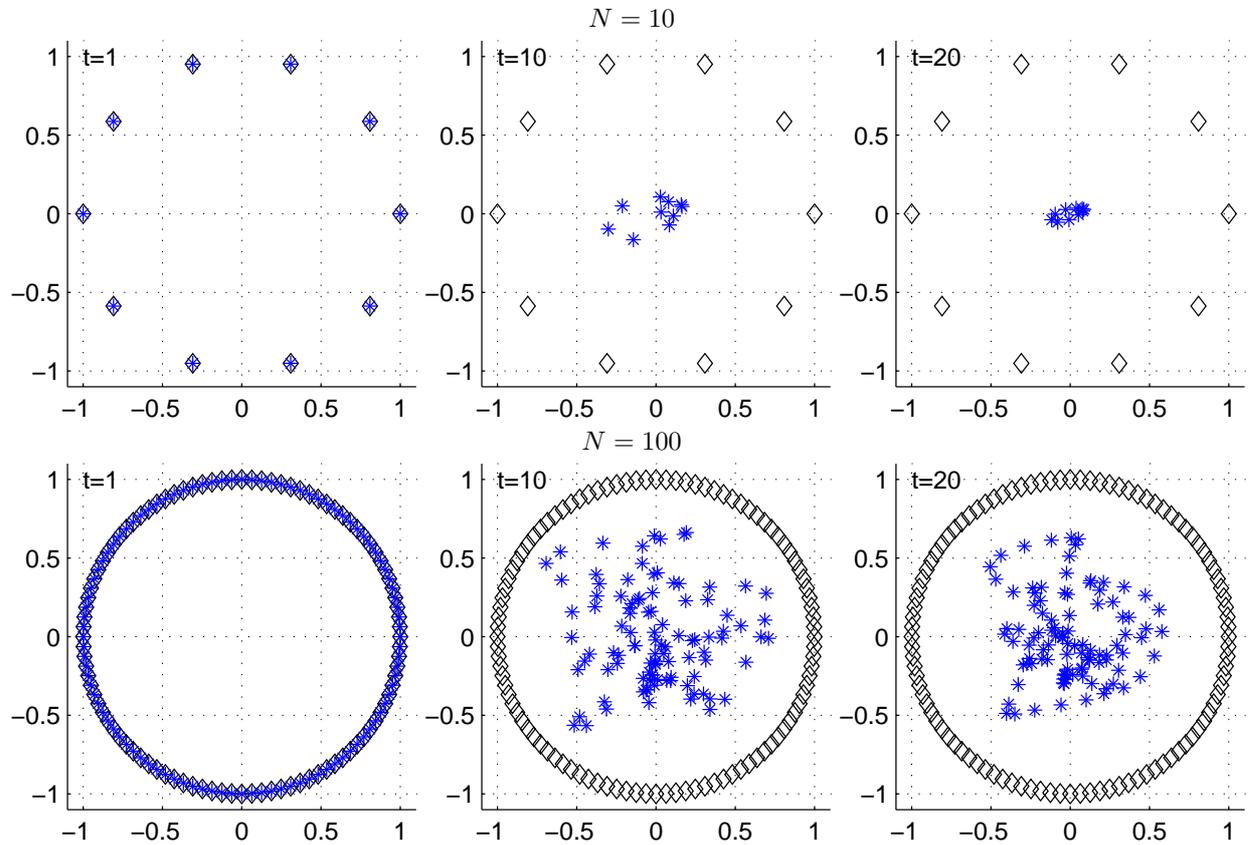


Figura 18.2. Convergenza più o meno veloce in base al numero di veicoli. Nelle figure è rappresentata la posizione dei veicoli nei casi $n = 10$ e $n = 100$ per i tempi $t = 1, 10, 20$.

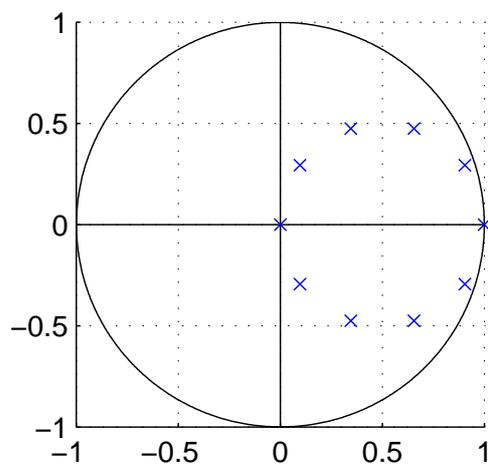


Figura 18.3. Autovalori della matrice circolante per $n = 10$.

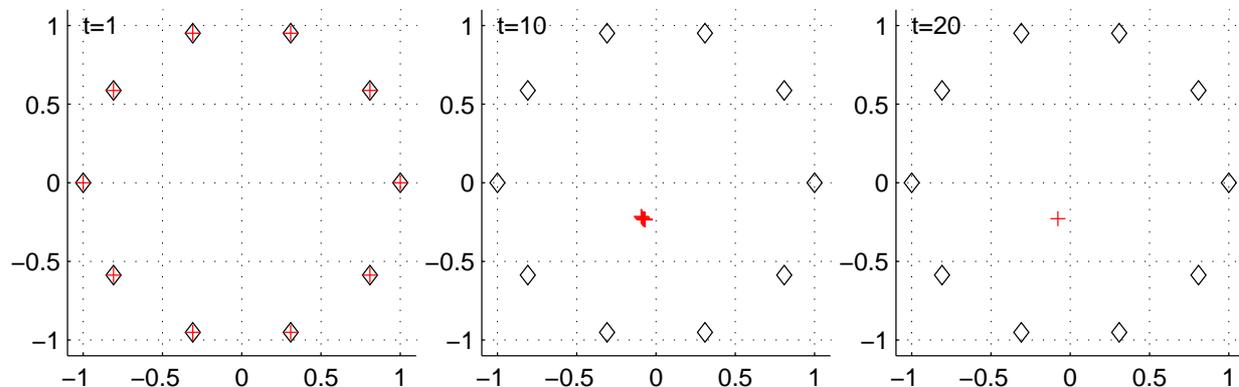


Figura 18.4. Convergenza con un grafo casuale diverso ad ogni passo, ai tempi $t = 1, 10, 20$.

Partendo da questa considerazione empirica, si può pensare di ricreare il grafo in modo casuale ad ogni passo, e si potrebbe dimostrare che anche in questo caso c'è convergenza. Effettivamente, simulando questo sistema con MATLAB si vede che la convergenza è enormemente più veloce, ma resta un problema: come si può implementare un simile algoritmo in pratica su dei robot mobili? Non è possibile ricostruire il grafo ad ogni passo, visto che questo richiederebbe un'enorme sforzo di comunicazione fra i robot, ed è proprio quello che si vuole evitare.

Quello che si può fare, e che funziona molto bene (in un senso probabilistico), è far sì che ogni robot invii la propria posizione a un'altro robot a caso, costruendo di fatto un grafo casuale, e in generale non fortemente connesso. Tuttavia, sarebbe possibile argomentare come questo sia fortemente connesso "in media", ma qui ci accontenteremo di vedere che funziona.

Come si osserva in figura 18.4, i veicoli convergono molto rapidamente, ma non vanno nel baricentro (come prevedibile, visto che la matrice P casuale non sarà quasi mai doppiamente stocastica).

18.2.3 Formazione

Un problema simile a quello del rendez-vous è quello della formazione. Si vuole che un gruppo di veicoli si disponga in una formazione, ovvero ciascuno in una posizione precisa relativamente a un punto non meglio specificato del piano (ad esempio il baricentro). Per esempio, quattro veicoli potrebbero formare un quadrato, di dimensioni date ma di centro non meglio specificato.

Data la posizione $z(t)$ dei veicoli, la soluzione al problema del rendez-vous fa convergere $z(t)$ a

$$z(t) \rightarrow \alpha \cdot \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix},$$

mentre quello che si vuole ottenere per convergere ad una data formazione è

$$z(t) \rightarrow \alpha \cdot \mathbf{1} + \bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{bmatrix},$$

dove $[\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n]^T$ è la formazione desiderata, relativa all'origine degli assi.

Se modifichiamo la legge di controllo in

$$z(t+1) = Pz(t) + C,$$

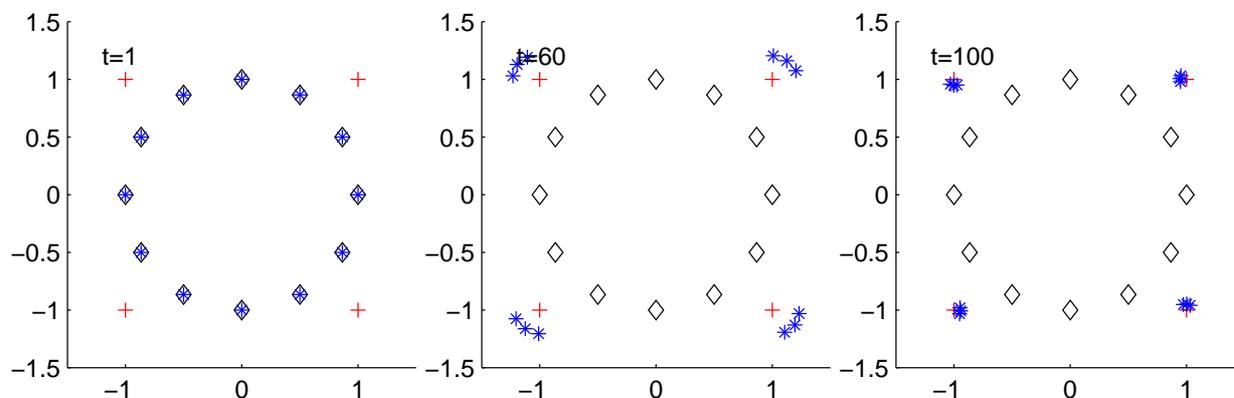


Figura 18.5. Dodici veicoli che si dispongono in formazione ai quattro angoli di un quadrato.

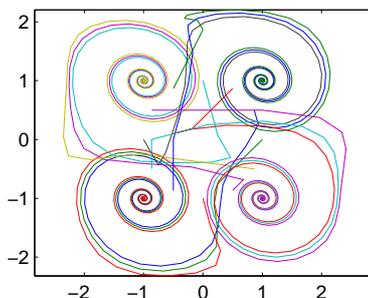


Figura 18.6. Traiettorie seguite dai veicoli per raggiungere la posizione finale.

ovvero aggiungiamo un controllo costante C , si può calcolare C tale che $z_\infty = \alpha \mathbf{1} + \bar{z}$ sia una soluzione stazionaria:

$$z_\infty = Pz_\infty + C \Rightarrow \alpha \mathbf{1} + \bar{z} = P(\alpha \mathbf{1} + \bar{z}) + C$$

e poiché $P \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$,

$$\bar{z} = P\bar{z} + C \Rightarrow C = (I - P)\bar{z}.$$

Ora che si è trovato il controllo costante da applicare, resta da dimostrare che il sistema effettivamente converge a z_∞ . Vediamolo:

$$z(t+1) = Pz + (I - P)\bar{z}$$

posto $\delta(t) = z(t) - \bar{z}$, si ha l'equivalenza

$$\delta(t) \rightarrow \alpha \mathbf{1} \Leftrightarrow z(t) \rightarrow \alpha \mathbf{1} + \bar{z},$$

quindi si può riscrivere l'equazione in termini del nuovo stato $\delta(t)$, e verificare il nuovo sistema converge in virtù del teorema 18.1:

$$z(t) - \bar{z} = P(z(t) - \bar{z}) + \bar{z} - \bar{z} \Rightarrow \delta(t) = P\delta(t)$$

e come conseguenza del sopracitato teorema, $\delta(t)$ converge a $\alpha \cdot \mathbf{1}$, quindi anche

$$z(t) \rightarrow \alpha \cdot \mathbf{1} + \bar{z}$$

In figura 18.5 si vede come un gruppo di 12 veicoli si disponga, a gruppi di tre, agli angoli di un quadrato, centrato nel baricentro (utilizzando il solito grafo circolante già visto).

Come si osserva in figura 18.6, i veicoli si spostano rapidamente verso le loro posizioni finali, poi iniziano a spiraleggiare intorno, convergendo (con la lentezza di cui si è già discusso) alla posizione prestabilita.