

Lezione 7 — Maggio 4

Docente: Luca Schenato

Stesore: Enrico Magon, Luca Parolini, Michele Nicetto

7.1 Stimatori in NCS soggetti a perdita di pacchetti

Si consideri il seguente sistema lineare stocastico:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k & x_k, w_k \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k \in \mathbb{N} \\ y_k = Cx_k + v_k & y_k, v_k \in \mathbb{R}^m, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{cases} \quad (7.1)$$

con x_0 , w_k e v_k variabili aleatorie gaussiane, scorrelate, con media $(\bar{x}_0, 0, 0)$ e covarianza (P_0, Q, R) rispettivamente. Si supponga inoltre che la coppia (A, C) sia osservabile e la coppia $(A, Q^{1/2})$ sia controllabile, e $R > 0$.

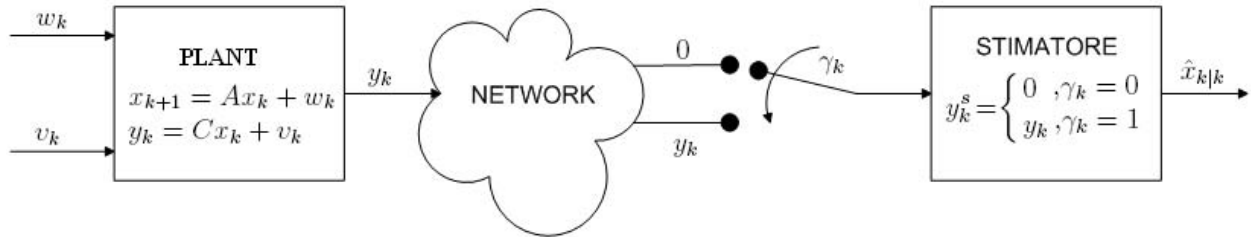


Figure 7.1. Schema Plant-Network-Stimatore: le misure y_k viaggiano contenute in pacchetti attraverso una generica rete prima di arrivare allo stimatore.

Per il momento si assume che la rete non introduca ritardi nella trasmissione delle misure y_k , per cui un generico pacchetto o arriva in tempo utile oppure è definitivamente perso. Il processo degli arrivi è modellato dalla variabile aleatoria γ_k nel modo seguente:

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{se } y_k \text{ è arrivata allo stimatore} \\ 0 & \text{se } y_k \text{ è stata persa.} \end{cases} \quad (7.2)$$

Nella trattazione che segue si trascura il rumore di quantizzazione introdotto dalla codifica/decodifica digitale dei dati: la scelta è motivata dal fatto che nella maggior parte dei casi reali esso risulta trascurabile in confronto al rumore di misura v_k . Allo stesso modo non viene considerato alcun rumore di canale in quanto se un pacchetto dovesse venire corrotto durante la trasmissione, questo sarebbe poi scartato dal ricevitore (pacchetto perso).

L'obiettivo è allora il calcolo dello stimatore ottimo a minima varianza $\hat{x}_{k|k}$ dato da¹

$$\hat{x}_{k|k} \triangleq \mathbb{E}[x_k | (y_k^s, \dots, y_0^s), (\gamma_k, \dots, \gamma_0), \bar{x}_0, P_0] \quad (7.3)$$

Si definiscono l'errore di stima e la sua varianza come

$$e_{k|k} \triangleq x_k - \hat{x}_{k|k} \quad (7.4)$$

$$P_{k|k} \triangleq \mathbb{E}[e_{k|k} e_{k|k}^T | (y_k^s, \dots, y_0^s), (\gamma_k, \dots, \gamma_0), \bar{x}_0, P_0] \quad (7.5)$$

Ricordando ora che il filtro di Kalman è uno stimatore ottimo nel caso di rumore gaussiano, e che è possibile sostituire al sistema (7.1), soggetto a perdita di pacchetti, il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k^s = C_k x_k + \tilde{v}_k \end{cases} \quad (7.6)$$

con $y_k^s = \gamma_k y_k$, $C_k = \gamma_k C$ e $\tilde{v}_k = \gamma_k v_k$, si perviene alle seguenti formule, in cui si osserva che viene apportata una correzione alla stima $\hat{x}_{k|k}$ solo se il pacchetto y_{k+1} è giunto a destinazione ($\gamma_k = 1$):

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = A\hat{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K_{k+1}(y_{k+1}^s - A\hat{x}_{k|k}) \quad (7.7)$$

$$P_{k+1|k} = AP_{k|k-1}A^T + Q - \gamma_k AP_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}CP_{k|k-1}A^T \quad (7.8)$$

$$K_k = AP_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1} \quad (7.9)$$

Si ha che lo stimatore ottimo $\hat{x}_{k|k}$ può essere calcolato ricorsivamente tenendo in memoria solamente la stima e la varianza d'errore calcolate al passo precedente. Similmente a quanto visto per il filtro di Kalman, si può pensare di utilizzare uno stimatore come quello appena descritto caratterizzato però da un guadagno K_k costante $\forall k \in \mathbb{N}$, definito come segue:

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K(y_{k+1}^s - A\tilde{x}_{k|k}) \quad (7.10)$$

L'errore di stima commesso da questo nuovo stimatore è definito come

$$\tilde{e}_{k|k} = x_k - \tilde{x}_{k|k} \quad (7.11)$$

la cui varianza è data da

$$\tilde{P}_{k+1|k} = \mathbb{E}[\tilde{e}_{k|k}\tilde{e}_{k|k}^T | (y_k^s, \dots, y_0^s), (\gamma_k, \dots, \gamma_0), \bar{x}_0, P_0] \quad (7.12)$$

Sostituendo la (7.9) nella (7.10) si ha

$$\tilde{e}_{k+1|k} = A(I - \gamma_k KC)\tilde{e}_{k|k-1} + w_k - \gamma_k AKv_k$$

da cui si ricava

$$\tilde{P}_{k+1|k} = A(I - \gamma_k KC)\tilde{P}_{k|k-1}(I - \gamma_k KC)^T A^T + Q + \gamma_k AKRK^T A^T \quad (7.13)$$

ottenuta utilizzando i seguenti fatti:

¹Osservando la (7.3) si nota come questo stimatore possieda l'informazione relativa all'esito positivo o negativo circa la consegna del pacchetto (misura) k -esimo. Non risulta quindi essere equivalente allo stimatore $\check{x}_{k|k} \triangleq \mathbb{E}[x_k | (y_k^s, \dots, y_0^s), \bar{x}_0, P_0]$ in cui le misure fittizie (pari a 0 nel nostro caso) generate in sostituzione di quelle perse sarebbero trattate come misure vere, portando quindi a prestazioni inferiori.

- $\gamma_k^2 = \gamma_k$;
- γ_k , v_k e w_k sono indipendenti;
- $\tilde{e}_{k|k-1} \subseteq \text{span}\{\gamma_{k-1}, v_{k-1}, w_{k-1}\} \perp \text{span}\{\gamma_k, v_k, w_k\} \forall k$;
- v_k e w_k hanno media nulla.

Per semplificare la notazione si introducono i seguenti operatori:

$$L_{\gamma_k}(K, \tilde{P}_{k|k-1}) \triangleq A(I - \gamma_k KC) \tilde{P}_{k|k-1} (I - \gamma_k KC)^T A^T + Q + \gamma_k AKRK^T A^T \quad (7.14)$$

$$\Phi_{\gamma_k}(P_{k|k-1}) \triangleq AP_{k|k-1} A^T + Q - \gamma_k AP_{k|k-1} C^T (CP_{k|k-1} C^T + R)^{-1} CP_{k|k-1} A^T \quad (7.15)$$

Si osserva che entrambi gli operatori sono funzioni di γ_k e in quanto tali risultano essere delle variabili aleatorie. In questo scenario una possibile metrica delle prestazioni dello stimatore è data dall'aspettazione della covarianza d'errore $\mathbb{E}_\gamma[P_{k+1|k}]$, dove l'aspettazione è calcolata relativamente al processo degli arrivi γ_k . Poiché $P_{k+1|k}$ è una funzione non lineare in γ_k , non è possibile calcolare $\mathbb{E}_\gamma[P_{k+1|k}]$ analiticamente tuttavia, essendo lo stimatore con K costante uno stimatore sub-ottimo si può certamente affermare che

$$P_{k+1|k} \leq \tilde{P}_{k+1|k} \quad (7.16)$$

e questo fatto permette, una volta determinata la varianza d'errore del filtro sub-ottimo, di stabilire un limite superiore per la varianza del filtro ottimo. Infatti la disuguaglianza sopra scritta continua a valere anche prendendo l'aspettazione di entrambi i termini, e si ottiene quindi

$$\bar{P}_k \triangleq \mathbb{E}[P_{k+1|k}] \leq \mathbb{E}[\tilde{P}_{k+1|k}] \triangleq \check{P}_k \quad (7.17)$$

Dove $\check{P}_k$ è invece facilmente calcolabile in quanto funzione lineare in γ_k e costituisce un limite superiore per $\bar{P}_k$

Il calcolo di $\check{P}_k$ restituisce:

$$\begin{aligned} \check{P}_{k+1|k} &= \mathbb{E}_\gamma[L_{\gamma_k}(K, \tilde{P}_{k|k-1})] \\ &= \mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})}[\mathbb{E}_{\gamma_k}[L_{\gamma_k}(K, \tilde{P}_{k|k-1})]] \\ &= \mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})} \left[L_{\gamma_k=0}(K, \tilde{P}_{k|k-1}) \mathbb{P}[\gamma_k = 0] + L_{\gamma_k=1}(K, \tilde{P}_{k|k-1}) \mathbb{P}[\gamma_k = 1] \right] \\ &= \mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})} \left[(A\tilde{P}_{k|k-1} A^T + Q)(1 - \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \left(A(I - KC) \tilde{P}_{k|k-1} (I - KC)^T A^T + Q + AKRK^T A^T \right) \lambda \right] \\ &= \lambda A(I - KC) \check{P}_{k|k-1} (I - KC)^T A^T + \\ &\quad + (1 - \lambda) A \check{P}_k A^T + Q + \lambda AKRK^T A^T \end{aligned} \quad (7.18)$$

Si definisce ora un nuovo operatore:

$$\bar{L}_\lambda(K, P) \triangleq \lambda A(I - KC)P(I - KC)^T A^T + (1 - \lambda)APA^T + Q + \lambda AKRK^T A^T, \quad (7.19)$$

e allo stesso modo possiamo ridefinire l'operatore Φ_{γ_k} nel modo seguente:

$$\Phi_\lambda(P) = APA^T + Q - \lambda APC^T(CPC^T + R)^{-1}CPA^T. \quad (7.20)$$

Tutte le matrici $\check{P}_{k|k-1}$ per $k = 0, \dots, t$ possono essere ottenute risolvendo le equazioni: $\check{P}_{k+1|k} = \bar{L}_\lambda(K, \check{P}_{k|k-1})$ per $k = 0, \dots, t$. La stabilità dello stimatore può quindi essere dedotta dalle proprietà dell'operatore $\bar{L}_\lambda(K, P)$.

L'operatore $\bar{L}_\lambda(K, P)$ gode delle seguenti proprietà:

1) $\bar{L}_\lambda(K, P) = \Phi_\lambda(P) + \lambda A(K - K_P)(CPC^T + R)(K - K_P)^T A^T$,
con $K_P \triangleq PC^T(CPC^T + R)^{-1}$; quindi

1.1) $\bar{L}_\lambda(K, P) \geq \Phi_\lambda(P), \forall K$;

2) dati λ_1 e λ_2 con $\lambda_1 \geq \lambda_2$ si ha $\Phi_{\lambda_1}(P) \leq \Phi_{\lambda_2}(P)$ per ogni P ;

3) date P_1 e P_2 con $P_1 \geq P_2$ si ha $\Phi_\lambda(P_1) \leq \Phi_\lambda(P_2)$.

Dalla proprietà 2) si evince che l'operatore $\Phi_\lambda(P)$ è monotono non decrescente in λ , nel senso che maggiore è la percentuale dei pacchetti arrivati migliore è la prestazione dello stimatore.

Partendo da questa considerazione e noto che per $\lambda = 1$ il filtro è stabile (*filtro di Kalman standard*) e per $\lambda = 0$ il filtro è instabile (*nessuna osservazione*) è possibile ottenere il grafico di Figura 7.2. Si osserva che se per $\lambda_1 < 1$ il filtro è stabile, allora lo sarà anche per ogni $\lambda \geq \lambda_1$, analogamente se il filtro è instabile per $\lambda_2 > 0$, allora sarà instabile per ogni $\lambda \leq \lambda_2$.

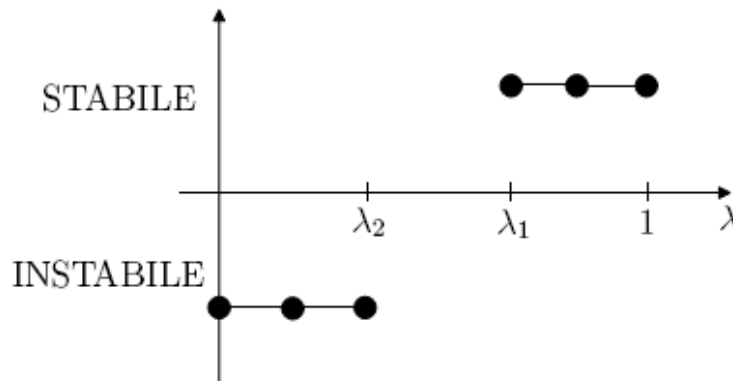


Figure 7.2. Stabilità del filtro in funzione di λ

- 4) Sotto l'ipotesi generale che la coppia (A, C) sia rivelabile si ha che se A è instabile allora esiste $\lambda_c : \forall \lambda > \lambda_c$ la successione definita da

$$S_{k+1} = \Phi_\lambda(S_k) \quad (7.21)$$

converge a $S_\infty \forall S_0 \geq 0$.

- 5) Se oltre alle ipotesi della 4) si aggiunge l'ipotesi che la coppia $(A, Q^{1/2})$ sia stabilizzabile, allora S_∞ è definita positiva e unica, e

$$K_\infty = S_\infty C^T (C S_\infty C^T + R)^{-1}$$

è ottima, nel senso che date le due successioni T_{k+1} e $\check{P}_{k+1}$ vale

$$T_{k+1} = \bar{L}_\lambda(K_\infty, T_k) \longrightarrow S_\infty$$

$$\check{P}_{k+1} = \bar{L}_\lambda(k, \check{P}_k) \longrightarrow \check{P}_\infty$$

con $S_\infty \leq \check{P}_\infty \forall k \neq K_\infty$.

Da un punto di vista pratico poichè non è in genere possibile ricavare S_∞ risolvendo analiticamente la MARE (*Modified Algebraic Riccati Equation*)(7.20), si ricorre ad un calcolo approssimato iterando l'equazione per un certo numero di passi a partire dalla condizione iniziale $S_0 = 0$ e, si osserva se la successione diverge, o converge ad una S_∞ , sempre sotto le ipotesi di rivelabilità della coppia (A, C) e stabilizzabilità della coppia $(A, Q^{1/2})$.

- 6) Per quanto riguarda λ_c in generale si ha che a priori non è possibile predirne il valore esatto, ma solo definire un range di appartenenza

$$\lambda_{min} \leq \lambda_c \leq \lambda_{max}$$

dove

$$\lambda_{min} = 1 - \frac{1}{\sigma_{max}^2(A)}$$

con $\sigma_{max} \triangleq$ massimo autovalore di A , e

$$\lambda_{max} = 1 - \frac{1}{\prod_j [\sigma_j^{inst}(A)]^2}$$

con $\sigma_j^{inst} \triangleq$ j-esimo autovalore instabile di A .

In particolare si avrà che $\lambda_c = \lambda_{min}$ nel caso in cui C sia una matrice quadrata invertibile, viceversa $\lambda_c = \lambda_{max}$ nel caso in cui C abbia rango 1.

- 7) Essendo S_∞ una funzione di λ si ha infine

$$S_\infty(\lambda_1) \leq S_\infty(\lambda_2) \iff \lambda_1 \geq \lambda_2$$