

Lezione 09 — Maggio 11

Docente: Luca Schenato

Stesore: Mirko Bordignon, Daniele Tamino

9.1 Controllo ottimo Lineare Quadratico (LQ)

Un metodo molto usato per determinare gli ingressi da applicare al sistema che si intende controllare è quello noto come Controllo Ottimo; a differenza di altri (ad es. l'allocazione empirica degli autovalori del sistema retroazionato), questa tecnica consente di determinare la sequenza di segnali di controllo ottima in relazione ad una specifica funzione di costo precedentemente definita, la quale assume il significato di metrica (ad es. tempo, energia, etc) secondo cui intendiamo minimizzare l'azione di controllo nell'intervallo di tempo $[0, T]$.

Indicando, al solito, con $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$ l'aggiornamento dello stato del sistema da controllare, un opportuno indice di costo (anche detto *funzione obiettivo*, mutuando la terminologia dalla programmazione dinamica) è il seguente:

$$J_T = \sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T W x_k + u_k^T U u_k) + x_T^T W x_T \quad (9.1)$$

$$= \begin{bmatrix} x_1^T & \dots & x_T^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0^T & \dots & u_{T-1}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & U \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{T-1} \end{bmatrix} + x_0^T W x_0$$

Essendo, per definizione della funzione, le matrici W ed U semidefinitive positive, i termini che compongono l'indice che ci si propone di minimizzare rappresentano quindi, durante l'intervallo considerato, lo scostamento dello stato dallo stato a regime e la spesa in termini di ingressi di controllo. A seconda della scelta delle matrici, si possono quindi pesare diversamente questi fattori a seconda di specifiche e vincoli da rispettare nella progettazione del sistema di controllo.

Ricordando che

$$x_1 = Ax_0 + Bu_0$$

$$x_2 = Ax_1 + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1$$

$$\vdots$$

$$x_T = A^T x_0 + A^{T-1} Bu_0 + \dots + Bu_{T-1}$$

possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_T \end{bmatrix} = [F] \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_{T-1} \end{bmatrix} + [G] x_0$$

di modo da poter convenientemente esprimere l'indice di costo (9.1) nella seguente forma:

$$J_T = \underline{u}^T F^T \overline{W} F \underline{u} + \underline{u}^T F^T \overline{W} G x_0 + x_0^T G^T \overline{W} F \underline{u} + x_0^T G^T \overline{W} G x_0 + x_0^T \overline{W} x_0 + \underline{u}^T \overline{U} \underline{u} \quad (9.2)$$

La funzione 9.2, dipendente dalla condizione iniziale x_0 (fissata) e dagli ingressi $u_0, \dots, u_{T-1}$ (da determinare), viene minimizzata dalla sequenza di ingressi $u_0^*, \dots, u_{T-1}^*$ che annulla la derivata rispetto agli ingressi stessi, essendo

$$(u_0^*, \dots, u_{T-1}^*) = \operatorname{argmin}_{u_0, \dots, u_{T-1}} J_T(u_0, \dots, u_{T-1}, x_0) \Leftrightarrow \frac{\partial J_T}{\partial \underline{u}} = 0$$

In particolare, dato che

$$\left(\frac{\partial J_T}{\partial \underline{u}} \right)^T = 2 (F^T \bar{W} F + \bar{U}) u + 2 F^T \bar{W} G x_0 = 0$$

l'ingresso di controllo ottimo, che minimizza il funzionale di costo, è dato da¹

$$\underline{u}^* = - (F^T \bar{W} F + \bar{U})^{-1} F^T \bar{W} G x_0 \quad (9.3)$$

Possiamo notare che, in questa forma, il calcolo della sequenza di ingresso ottima dipende unicamente dallo stato iniziale: tra gli svantaggi che ciò comporta ci sono la necessità di dover ricalcolare tutta la sequenza in caso di cambiamento delle condizioni iniziali, e la natura in catena aperta della legge di controllo che ne deriva; eventuali disturbi che modifichino lo stato del sistema durante l'intervallo $[0, T]$ non sono tenuti in considerazione, dipendendo l'ingresso dalle sole condizioni iniziali.

Vediamo ora un metodo per calcolare in maniera ricorsiva la sequenza di ingresso ottima, metodo che porge una formulazione della stessa che si presta ad essere realizzata facilmente mediante retroazione dallo stato (e quindi con i vantaggi derivanti da una legge di controllo in catena chiusa).

9.2 Metodo della funzione a costo minimo

Per risolvere in modo ricorsivo il problema della minimizzazione della funzione costo (9.1), si usa il metodo della funzione a costo minimo, che è basato su *Programmazione Dinamica*.

Conoscendo il costo all'istante k , pari a $c(x_k, u_k)$, e dovendo minimizzare la somma dei costi scegliendo opportunamente gli $\{u_k\}$, posso esprimere il costo ottimo nell'intervallo $[k, T]$ in funzione del costo ottimo nell'intervallo $[k+1, T]$:

$$V_k^*(x_k) = \min_{u_k} \{c(x_k, u_k) + V_{k+1}^*(x_{k+1})\} = \min_{u_k} \{c(x_k, u_k) + V_{k+1}^*(f(x_k, u_k))\} \quad (9.4)$$

Nel nostro caso, la $f(u_k, x_k)$ è l'equazione di aggiornamento dello stato

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (9.5)$$

mentre il costo di un passo è pari a

$$c(x_k, u_k) = x_k^T W x_k + u_k^T U u_k, \quad (9.6)$$

quindi la funzione a costo minimo risulta

$$V_k^*(x_k) = \min_{u_k} \{x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + V_{k+1}^*(Ax_k + Bu_k)\} \quad (9.7)$$

Vedremo che la soluzione di questo problema si ottiene, come nel caso del filtro di Kalman, calcolando la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati (DRE).

Teorema 9.1. *La funzione a costo minimo, per il sistema dinamico (9.5) con costo di un passo pari a (9.6) vale*

$$V_k^*(x_k) = x_k^T S_k x_k, \quad (9.8)$$

dove S_k è la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati

$$\begin{aligned} S_k &= A^T S_{k+1} A - A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A + W \\ S_T &= W \quad (\text{condizione finale}) \end{aligned} \quad (9.9)$$

¹In caso la matrice $(F^T \bar{W} F + \bar{U})$ non sia invertibile, si può dimostrare che il minimo può essere ottenuto tramite la stessa equazione con il piccolo accorgimento di sostituire l'operazione di inversa con quella di pseudoinversa.

Dimostrazione: Si procede per induzione. Nel caso base $k = T$, questo è ovviamente verificato in quanto non è possibile nessun controllo (l'ultimo ingresso di controllo è u_{T-1}), mentre supponendo vero il teorema al passo $k + 1$, si dimostra che questo vale al passo k .

Sostituendo in (9.7) l'espressione per V_{k+1}^* (9.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} V_k^*(x_k) &= \min_{u_k} \left\{ x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + (A x_k + B u_k)^T S_{k+1} (A x_k + B u_k) \right\} \\ &= \min_{u_k} \left\{ x_k^T (W + A^T S_{k+1} A) x_k + u_k^T (U + B^T S_{k+1} B) u_k + 2 x_k^T A^T S_{k+1} B u_k \right\} \\ &= x_k^T (W + A^T S_{k+1} A) x_k + \min_{u_k} \left\{ u_k^T (U + B^T S_{k+1} B) u_k + 2 x_k^T A^T S_{k+1} B u_k \right\} \end{aligned} \quad (9.10)$$

dove nell'ultimo passaggio è stato portato fuori dall'operatore di minimo il termine indipendente da u_k . Per trovare l'ingresso minimo u_k^* si calcola la derivata dell'espressione da minimizzare, e si equaglia a zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_k} (u_k^T (U + B^T S_{k+1} B) u_k + 2 x_k^T A^T S_{k+1} B u_k) &= 0 \\ 2 (U + B^T S_{k+1} B) u_k + 2 B^T S_{k+1} A x_k &= 0 \end{aligned}$$

L'ingresso ottimo risulta quindi

$$u_k^* = - (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A x_k \quad (9.11)$$

Per verificare che l'ipotesi induttiva vale anche per il passo k si procede a sostituire l'espressione dell'ingresso ottimo (9.11) in (9.10), ottenendo:

$$\begin{aligned} V_k^*(x_k) &= x_k^T (W + A^T S_{k+1} A) x_k + \\ &\quad + x_k^T A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A x_k - 2 x_k^T A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A x_k = \\ &= x_k^T (W + A^T S_{k+1} A) x_k - x_k^T A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A x_k = \\ &= x_k^T \left(W + A^T S_{k+1} A - A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A \right) x_k = x_k^T S_k x_k \end{aligned}$$

ritrovando così l'equazione di Riccati (9.9), ovvero l'espressione di S_k . □

Riassumendo, per risolvere in maniera efficiente il problema del controllo ottimo ad orizzonte finito, si devono calcolare le matrici S_k , a partire da

$$S_T = W,$$

quindi procedendo a ritroso per calcolare S_k conoscendo S_{k+1} , tramite l'equazione alle differenze di Riccati (9.9).

L'ingresso ottimo si ricava come retroazione dallo stato,

$$u_k^* = L_k x_k,$$

dove la matrice di retroazione L_k si calcola a partire da S_{k+1} , con la formula:

$$L_k = - (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A.$$

9.3 Dualità col filtro di Kalman

È interessante osservare come il controllore ottimo LQ sia il duale dello stimatore ottimo di Kalman, operando le seguenti sostituzioni:

LQ	Kalman
$\Sigma = (A, B, C)$	$\Sigma_d = (A^T, C^T, B^T)$
P_0	S_T
$P_{k k-1}$	S_{T-k}
W	Q
U	R
(A, B) stabilizzabile	(A, C) rivelabile
$(A, W^{1/2})$ rivelabile	$(A, Q^{1/2})$ stabilizzabile
$\lim_{T \rightarrow +\infty} S_0 = S_\infty$	$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_{k k-1} = P_\infty$

Per queste ragioni, tutti i teoremi visti per il filtro di Kalman, relativi all'esistenza e unicità del limite di $P_{k|k-1}$ si applicano pari pari a S_k , e quindi al sistema retroazionato con L_k , per quel che riguarda la stabilità.