PSC: Progettazione di sistemi di controllo **III Trim. 2007**

Lezione 21.b — Maggio 30

Docente: Luca Schenato *Stesore: Comin, Dal Bianco, Fabris, Parmeggiani*

.b

Esempio: Supponiamo di avere $N = 4$ e $q = 1/2$ il che significa che se due nodi comunicano tra loro essi si potreranno nel punto medio. Si suppne poi che si verifichino in seequenza le quattro azioni:

1. comunicano x_1 e x_3
2. comunicano x_2 e x_4
3. comunicano x_1 e x_2
4. comunicano x_3 e x_4

In tal caso una generica evoluzione della matrice P sarà del tipo:
$P(0), P(1), \ldots, P(t-1), P(t), P(t+1), P(t+2), P(t+3)$ in cui con gli ultimi quattro passi il sistema presenterà un'evoluzione a zero come rappresentato dalle figure.

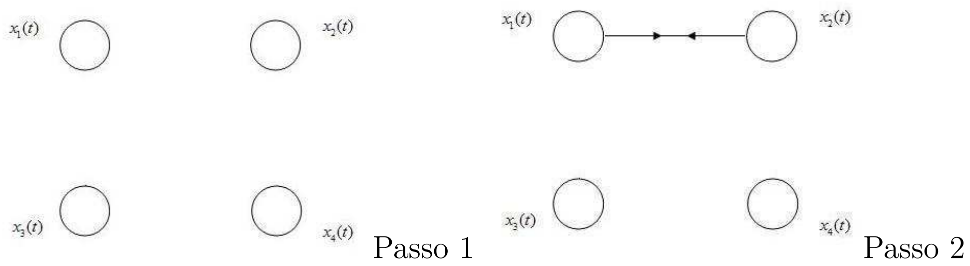

Figura 21.1. Situazione iniziale del sistema a quattro nodi e prima iterazione tra essi.

Con quattro particolari scambi di informazione tra nodi si ottiene: $d(t) = 0$. Questo dimosra che si ottiene una risposta deat-beat.

Consideando $N = 16$ si ottiene ancora lo stesso comportamento ma l'orrizzonte temporale di convergenza risulta molto più lontano. Inoltre subentrano problemi di 'convergenza ' dovuti alla quantizzazione.
Ci chiediamo ora da cosa può essere dato il $rand = 0.93$. La risposta si può ricercare facendo l'analisi dei momenti a regime.
Si suppone $\beta(\infty) = x(0)^T B(\omega) x(0)$ dove $B(\omega) = (\rho - \frac{1}{N}\mathbf{1})(\rho - \frac{1}{N}\mathbf{1})^T$ in questo modo si riesce

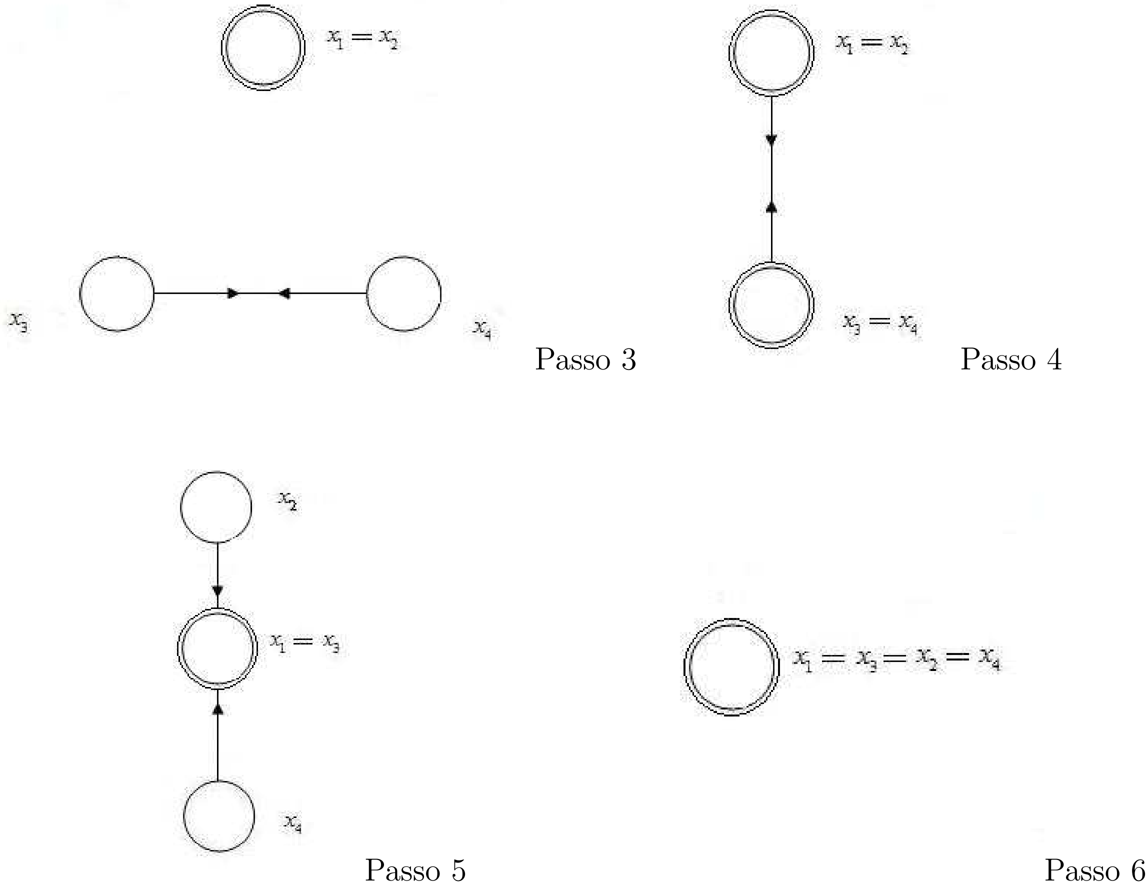

Figura 21.2. Evoluzione del sistema di quattro nodi. In un numero finito di passi si porta alla convergenza

a calcolare il valore atteso: $\mathbb{E}[\beta(\infty)] = x(0)^T \bar{B} x(0)$ dove:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \mathbb{E}[B] \\ &= \mathbb{E}[\rho\rho^T] - \tfrac{1}{N}\mathbb{E}[\rho]\mathbf{1}^T - \tfrac{1}{N}\mathbf{1}\mathbb{E}[\rho]^T + \tfrac{1}{N^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[\rho]$ è l'autovettore sinistro di $\bar{P}$ cioè $\mathbb{E}[\rho]^T \bar{P} = \mathbb{E}[\rho]^T d$ Anche se l'algoritmo non mantiene la media la $\bar{P}$ è comunque doppiamente stocastica. In tal caso $\mathbb{E}[\rho] = \frac{1}{N}\mathbf{1}$ e la risultante $\bar{B} = \mathbb{E}[\rho\rho^T] - \frac{1}{N^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$

Per quanto riguarda il transitorio si vuole capire quanto velocemente tende a zero l'aspettazione: $\mathbb{E}[d(t)] \to 0$. La velocità di convergenza è di tipo esponenziale; si può notare questo da come è fatta la funzione $d(t)$:

$$
\begin{aligned}
d(t) &= \tfrac{1}{N}||x(t) - x_A(t)\mathbf{1}||^2 \\
&= \tfrac{1}{N}||x(t) - \tfrac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N}x(t)||^2 \\
&= \tfrac{1}{N}||(I - \tfrac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N})x(t)||^2 \\
&= \tfrac{1}{N}||\Omega x(t)||^2
\end{aligned}
$$

Quindi, tenendo conto delle propritá di Ω:

1. Ω è simmetrico
2. Ω è una proiezione $\Omega = \Omega \cdot \Omega$

e del fatto che $x(t) = Q(t)x(0)$, si può calcolare l'aspettazione $\mathbb{E}[d(t)]$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[d(t)] &= \tfrac{1}{N}\mathbb{E}[x(t)^T\Omega^T\Omega x(t)] \\
&= \tfrac{1}{N}\mathbb{E}[x(t)^T\Omega x(t)] \\
&= \tfrac{1}{N}x(0)^T\mathbb{E}[Q(t)^T\Omega Q(t)]x(0) \\
&= x(0)^T\Delta(t)x(0)
\end{aligned}
$$

dove $\Delta(t) = \frac{1}{N}\mathbb{E}[Q(t)^T\Omega Q(t)]$.
$\Delta(t)$ evolve come un sistema lineare tempo discreto e tende a zero in maniera esponenziale.

$$
\begin{aligned}
\Delta(t+1) &= \mathbb{E}\left[P(0)^TP(1)^T\cdots P(t)^T\Omega P(t)\cdots P(0)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[P(0)^TP(1)^T\cdots P(t)^T\Omega P(t)\cdots P(0)|P(0)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[P(0)^T\mathbb{E}\left[P(1)^T\cdots P(t)^T\Omega P(t)\cdots P(1)|P(0)\right]P(0)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[P(0)^T\Delta(t)P(0)\right]
\end{aligned}
$$

avendo sfruttato la proprietà della probabilità condizionata $\mathbb{E}[z] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[z|x]\right]$.
Si definisce quindi $L : \Re^{N\times N} \to \Re^{N\times N}$:

$$
\Delta \to \mathbb{E}\left[P(0)^T\Delta P(0)\right] \to \begin{cases} \Delta(t+1) &= L(\Delta(t)) \\ \Delta(0) &= \Omega \end{cases}
$$

Si prenda ora lo spazio vettoriale $R =< \Omega, \alpha(\Omega), \alpha^2(\Omega), \cdots > \to L_R$, e

$$
L(\Delta) = \mathbb{E}\left[P(0)^T\Delta P(0)\right] = \sum_i p_iP_i^T\Delta P_i
$$

dove $P(0) = P_i$ con probabilità p_i; L è un operatore lineare anche se mappa matrici in matrici.
Si definisce ora $\delta(t) = \mathrm{vect}(\Delta(t))$, dove l'operatore *vect* è dato da

$$\mathrm{vect}(E|M) = \mathbb{E}\left[\mathrm{vect}M\right]$$

L'aggiornamento di δ si ottiene come:

$$\delta(t+1) = \mathrm{vect}\left(\mathbb{E}\left[P(0)^T \Delta(t) P(0)\right]\right) = \mathbb{E}\left[\mathrm{vect}\left(P(0)^T \Delta(t) P(0)\right)\right] \tag{21.1}$$

Esiste inoltre una relazione tale per cui, date tre matrici A, B, $C \in \Re^{n\times n}$,

$$\mathrm{vect}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vect}(B)$$

Applicando questa proprietà alla relazione riportata in (21.1) si trova che

$$\delta(t+1) = \mathbb{E}\left[P(0)^T \otimes P(0)\right]\delta(t)$$

con $E\left[P(0)^T \otimes P(0)\right] = L$ matrice $\in \Re^{N^2\times N^2}$ che rappresenta la media di tutti i prodotti di Kroenecker.
Si può dimostrare che L^T è stocastica, visto che valgono le due proprietà circa le matrici stocastiche:

1. se L ha diagonale > 0 con probabilità 1
2. G_L è fortemente connesso

con queste due proprietà si arriva al consensus: si ha un autovalore pari a 1, mentre tutti gli altri sono contenuti nel cerchio unitario.