

Lezione 10 — Maggio 10

Docente: Luca Schenato

Stesori: Marcassa A., Marcon R., Maran F., Zanella F.

10.1 Filtro ottimo con perdita di pacchetti e ritardo

Dalla lezione precedente si è visto che per considerare l'effetto di ritardi nella ricezione delle misure, oltre alla possibile perdita di pacchetti, si introducono le variabili

$$\gamma_k^t \triangleq \begin{cases} 1 & \text{se la misura } y_k \text{ è disponibile allo stimatore all'istante } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}; \quad \gamma_k^t \in \{0, 1\}$$

$$\tau_k \triangleq \begin{cases} \infty & \text{se } \gamma_k^t = 0 \forall t \\ \bar{t} - k & \text{dove } \bar{t} = \min\{t \mid \gamma_k^t = 1\} \end{cases}; \quad \tau_k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Il filtro ottimo è

$$\begin{cases} \hat{x}_{k|k}^t = A\hat{x}_{k-1|k-1}^t + \gamma_k^t K_k^t (\tilde{y}_k^t - CA\hat{x}_{k-1|k-1}^t) \\ K_k^t = P_{k|k-1}^t C^T (CP_{k|k-1}^t C^T + R)^{-1} \\ P_{k+1|k}^t = \Phi_{\gamma_k^t} (P_{k|k-1}^t) \\ \tilde{y}_k^t = \gamma_k^t y_k \end{cases} \quad k = 0, \dots, t. \quad (10.1)$$

a partire dalle condizioni iniziali

$$\begin{cases} \hat{x}_{-1|-1}^t = x_0 \\ P_{0|-1}^t = P_0 \end{cases}. \quad (10.2)$$

Se si ha $\gamma_k^t = \gamma_k^{t-1} \forall t - k \geq N$, cioè se $\tau_k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \cup \{\infty\}$ (*buffer finito*), il filtro ottimo diviene

1. per $t = 0, \dots, N-1$ (10.1), per $k = 0, \dots, t$, con condizioni iniziali (10.2);
2. per $t > N$ si usa come inizializzazione

$$\begin{cases} \hat{x}_{t-N|t-N}^t = \hat{x}_{t-N|t-N}^{t-1} \\ P_{t-N+1|t-N}^t = P_{t-N+1|t-N}^{t-1} \end{cases}$$

e poi si applica (10.1) per $k = t - N + 1, \dots, t \Rightarrow$ si hanno N iterazioni.

Valgono le seguenti osservazioni:

1. in generale, ad ogni t si devono invertire t matrici;
2. se esiste un ritardo massimo per i pacchetti che arrivano, lo stimatore risulta essere un filtro di Kalman con buffer di dimensione $N \Rightarrow$ inversione di N matrici ad ogni t ;

3. non si fa nessuna ipotesi su γ_k^t ;

da queste si deduce l'inefficienza del filtro illustrato, sotto le ipotesi considerate finora (dipendenza da t o da N , che possono essere grandi e portare a complessità computazionale eccessiva e problemi numerici).

10.2 Filtro a guadagno costante

Per rendere più efficienti i calcoli si può pensare di usare un filtro a guadagno costante: in questo caso, alla k -esima iterazione le equazioni diventano

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k|k}^t = A\tilde{x}_{k-1|k-1}^t + \gamma_k^t \bar{K}_{t-k} \left(\tilde{y}_k^t - CA\tilde{x}_{k-1|k-1}^t \right) \\ \tilde{x}_{t-N|t-N}^t = \tilde{x}_{t-N|t-N}^{t-1} \end{cases} \quad k = t - N + 1, \dots, t; \quad (10.3)$$

si hanno quindi N guadagni *precalcolati* K_i , $i = 0, \dots, N - 1$, uno per ogni slot del buffer, e viene meno la necessità di invertire matrici ad ogni iterazione. La covarianza d'errore del filtro (10.3) è

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{k|h}^t &= \mathbb{E} \left[\left(x_k - \tilde{x}_{k|h}^t \right) \left(x_k - \tilde{x}_{k|h}^t \right)^T \middle| \tilde{y}_h^t, \dots, \tilde{y}_0^t, \gamma_h^t, \dots, \gamma_0^t \right] \\ &= \tilde{P}_{k|h}^t \left(\gamma_h^t, \dots, \gamma_0^t \right). \end{aligned}$$

Il filtro appena definito non è ottimo, quindi vale $P_{k|h}^t \leq \tilde{P}_{k|h}^t$ e la disuguaglianza si mantiene passando alle aspettative

$$\mathbb{E} \left[P_{k|h}^t \right] \leq \mathbb{E} \left[\tilde{P}_{k|h}^t \right] \triangleq \check{P}_{k|h}^t;$$

$\check{P}_{k|h}^t$ è un valore deterministico e calcolabile, funzione di $\{\bar{K}_i\}_{i=0}^{N-1}$. Si vogliono scegliere i $\{\bar{K}_i\}_{i=0}^{N-1}$ che minimizzano $\check{P}_{k|h}^t$ (in particolare, $\check{P}_{t+1|t}^t$).

Da (10.3), $\tilde{x}_{t-N|t-N}^t = \tilde{x}_{t-N|t-N}^{t-1} \Rightarrow \tilde{P}_{t-N|t-N}^t = \tilde{P}_{t-N|t-N}^{t-1}$; è facile verificare che

$$\tilde{P}_{k+1|k}^t = A \left(I - \gamma_k^t \bar{K}_{t-k} C \right) \tilde{P}_{k|k-1}^t \left(I - \gamma_k^t \bar{K}_{t-k} C \right)^T A^T + Q + \gamma_k^t A \bar{K}_{t-k} R \bar{K}_{t-k}^T A^T = \mathcal{L}_{\gamma_k^t} \left(\bar{K}_{t-k}, \tilde{P}_{k|k-1}^t \right)$$

per $k = t - N + 1, \dots, t$.

Supponiamo che i γ_k^t e i τ_k siano i.i.d., con probabilità d'arrivo $\mathbb{P}[\tau_k \leq h] = \lambda_h \forall k$; si vede che

$$\mathbb{P}[\tau_k \leq h + 1] = \mathbb{P}[\tau_k \leq h] + \underbrace{\mathbb{P}[\tau_k = h + 1]}_{\geq 0} \Rightarrow \lambda_{h+1} \geq \lambda_h$$

e

$$\mathbb{P}[\tau_k = h] = \lambda_h - \lambda_{h-1}, \quad \mathbb{P}[\tau_k = 0] = \mathbb{P}[\tau_k \leq 0] = \lambda_0.$$

La probabilità di perdita di un pacchetto è $\lambda_l = \mathbb{P}[\tau_k = \infty] = 1 - \sup \lambda_h$; risulta così descritta una distribuzione di probabilità, una cui realizzazione è in figura 10.1, dove τ_{\max} è il *ritardo massimo* dei pacchetti che arrivano definito come

$$\tau_{\max} \triangleq \begin{cases} \infty & \text{se } \nexists \bar{h} \mid \lambda_{\bar{h}} = \lambda_h \forall h \geq \bar{h} \\ H & \text{altrimenti, con } H = \min \{ \bar{h} \mid \lambda_{\bar{h}} = \lambda_h \forall h \geq \bar{h} \}. \end{cases}$$

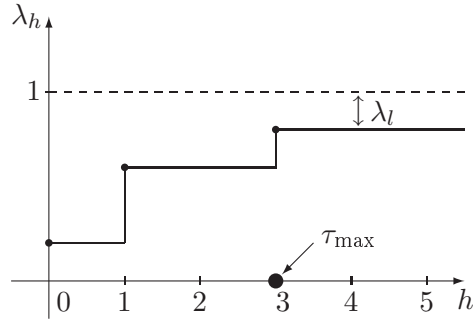


Figura 10.1. Andamento della distribuzione di probabilità.

Sfruttando le considerazioni appena fatte, si ha che

$$\mathbb{E} [\gamma_k^t] = \mathbb{P} [\gamma_k^t = 1]$$

$$\text{ritardo di } y_k \text{ è } \leq t - k \rightarrow \mathbb{P} [\tau_k \leq t - k] = \lambda_{t-k};$$

per $k = t - N + 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t-N+2|t-N+1}^t &= \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+1}^t} \left(\bar{K}_{N-1}, \tilde{P}_{t-N+1|t-N}^t \right) \\ \tilde{P}_{t-N+1|t-N}^t &= \tilde{P}_{t-N+1|t-N}^{t-1} \rightarrow \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+1}^t} \left(\bar{K}_{N-1}, \tilde{P}_{t-N+1|t-N}^{t-1} \right) \end{aligned}$$

e ponendo $S^t \triangleq \tilde{P}_{t-N+1|t-N}^{t-1} \Rightarrow S^{t+1} = \tilde{P}_{t-N+2|t-N+1}^t$ si ha la relazione

$$S^{t+1} = \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+1}^t} \left(\bar{K}_{N-1}, S^t \right); \quad (10.4)$$

a partire da S^t , si applica N volte l'operatore \mathcal{L}

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{t-N+3|t-N+2}^t &= \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+2}^t} \left(\bar{K}_{N-2}, S^{t+1} \right) \\ \tilde{P}_{t-N+4|t-N+3}^t &= \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+3}^t} \left(\bar{K}_{N-3}, S^{t+2} \right) = \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+3}^t} \circ \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+2}^t} \circ \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+1}^t} (S^t) \\ &\vdots \\ \tilde{P}_{t+1|t}^t &= \underbrace{\mathcal{L}_{\gamma_t^t} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+1}^t}}_{N \text{ volte}} (S^t) \end{aligned}$$

ottenendo $\tilde{P}_{t+1|t}^t$.

Definiamo ora $\bar{S}_t \triangleq \mathbb{E}_\gamma [S_t]$: risulta

$$\begin{aligned} \bar{S}_{t+1} &= \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_{N-1}} \left(\bar{K}_{N-1}, \bar{S}_t \right) \\ \mathbb{E}_\gamma \left[\tilde{P}_{t+1|t}^t \right] &= \tilde{P}_{t+1|t}^t = \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_0} \circ \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_1} \circ \dots \circ \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_{N-1}} \left(\bar{S}_t \right) \end{aligned}$$

e quindi basta calcolare \bar{S}_t per ottenere $\check{P}_{t+1|t}^t$. Ora, se si riesce a dimostrare che $\bar{S}_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{S}_\infty$, allora anche $\check{P}_{t+1|t}^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_0} \circ \dots \circ \bar{\mathcal{L}}_{\lambda_{N-1}}(\bar{S}_\infty)$.

Dati $\bar{K}_0, \dots, \bar{K}_{N-1}$ siamo in grado di calcolare, se esiste,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\check{P}_{t+1|t}^t \right]$$

trovando prima $\bar{S}_\infty^{N-1} | \bar{S}_\infty^{N-1} = \mathcal{L}_{\lambda_{N-1}}(\bar{S}_\infty^{N-1}, \bar{K}_{N-1})$ (punto fisso) e poi iterando

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_\infty^{N-2} &= \mathcal{L}_{\lambda_{N-2}}(\bar{S}_\infty^{N-1}, \bar{K}_{N-2}) \\ \bar{S}_\infty^{N-3} &= \mathcal{L}_{\lambda_{N-3}}(\bar{S}_\infty^{N-2}, \bar{K}_{N-3}) \\ &\vdots \\ \bar{S}_\infty^0 &= \mathcal{L}_{\lambda_0}(\bar{S}_\infty^1, \bar{K}_0) \end{aligned} \right\} N-1 \text{ iterazioni.}$$

I \bar{K}_i ottimi sono i guadagni che minimizzano la funzione $\min_{\{\bar{K}_i\}_{i=1}^{N-1}} \bar{S}_\infty^0$; sappiamo che

$$\bar{S}_\infty^0 = \mathcal{L}_{\lambda_0}(\bar{S}_\infty^1, \bar{K}_0) \leq \Phi_{\lambda_0}(\bar{S}_\infty^1)$$

ma $\exists \bar{K}_{0,\infty}$ che rende la disuguaglianza un'uguaglianza:

$$\bar{K}_{0,\infty} = \bar{S}_\infty^1 C^T (C \bar{S}_\infty^1 C^T + R)^{-1}.$$

Il procedimento si ripete per ogni equazione dell'iterazione, ovvero

1. si calcola il punto fisso \bar{S}_∞^{N-1} e $\bar{K}_{N-1,\infty}$;
2. \forall iterazione i ($N-1$ in totale) prima si calcola \bar{S}_∞^{N-i} , poi \bar{K}_∞^{N-i} .

Si ha che

$$S_\infty^{N-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k, \quad V_{k+1} = \Phi_{\lambda_{N-1}}(V_k).$$