

## 11.1 Filtro con buffer a guadagni costanti con perdita di pacchetti e ritardo

Come visto nella lezione precedente, le equazioni del filtro con buffer di lunghezza  $N$  sono:

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k|k}^t = A\tilde{x}_{k-1|k-1}^t + \gamma_k^t \bar{K}_{t-k} \left( \tilde{y}_k^t - CA\tilde{x}_{k-1|k-1}^t \right) \\ \tilde{x}_{t-N|t-N}^t = \tilde{x}_{t-N|t-N}^{t-1} \end{cases} \quad k = t - N + 1, \dots, t. \quad (11.1)$$

Si è visto come tale filtro, disponendo di  $N$  guadagni costanti, necessita di risorse nettamente inferiori rispetto all'analogo filtro con guadagni tempo varianti poichè i vari  $K_i$  vengono calcolati *offline* solo inizialmente e non vengono ricalcolati per ogni istante  $t > N$ . Per trovare i  $K_i$  ottimi è necessario tuttavia disporre di una statistica a priori della sequenza di arrivo delle misure. In tal caso si ha dunque un vantaggio computazionale a fronte di una informazione statistica a priori tutt'altro che scontata. Per quanto riguarda la covarianza d'errore si ha

$$\tilde{P}_{t+1|t}^t = \mathbb{E} \left[ (x_{t+1} - \tilde{x}_{t+1|t}^t) (x_{t+1} - \tilde{x}_{t+1|t}^t)^T \mid \tilde{y}_t^t, \dots, \tilde{y}_0^t, \gamma_t^t, \dots, \gamma_0^t \right] = \mathcal{L}_{\gamma_t^t} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{\gamma_{t-N+1}^t} (S_t)$$

dove  $S_t \triangleq \tilde{P}_{t-N+1|t-N}^{t-1}$ . Facendone l'aspettazione si ottiene

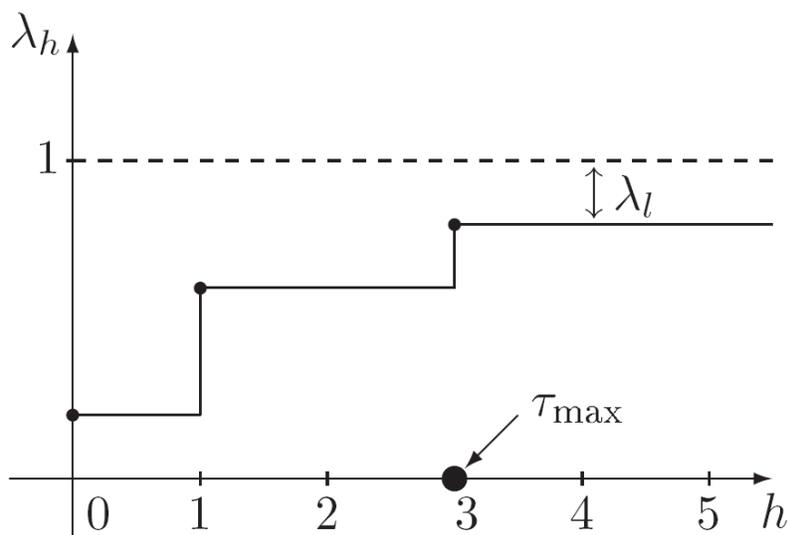
$$\check{P}_{t+1|t}^t = \mathbb{E}_\gamma \left[ \tilde{P}_{t+1|t}^t \right] = S_\infty(N) \leq S_\infty(N-1)$$

dove si vede che questa dipende dalla lunghezza  $N$  del buffer. La diseguaglianza si ha nel caso in cui  $N < \tau_{max}$ , dove  $\tau_{max}$  è il ritardo massimo di arrivo dei pacchetti. E' intuitivo comprendere che un buffer di dimensione inferiore a  $\tau_{max}$  farà perdere efficienza al filtro (o addirittura provocarne l'instabilità), poichè nel caso di ritardi frequentemente di entità superiore a  $N$ , verranno perse gran parte delle misure facendo di fatto lavorare il filtro per lo più in catena aperta.

Per quanto riguarda la probabilità di arrivo di un pacchetto essa è data da  $\lambda_h = \mathbb{P}[\tau_k \leq h]$  un cui possibile andamento è mostrato in figura 11.1.

Si può dimostrare che l'esistenza del punto fisso cercato nell'ultimo paragrafo della scorsa lezione dà una condizione sulla probabilità di perdita di pacchetto. Esso infatti esiste se e solo se  $\lambda_{N-1} > \lambda_c$  che, moltiplicando per  $-1$  ambo i membri e aggiungendo 1 equivale a  $\lambda_l < 1 - \lambda_c$ .

Si può notare come nonostante la varianza d'errore cresce esponenzialmente col ritardo medio di pacchetto tale condizione sulla stabilità sia indipendente dal tempo<sup>1</sup>. In figura 11.2 si può



**Figure 11.1.** Una possibile distribuzione di probabilità di arrivo di pacchetti.

vedere una curva tipica di prestazione di tale filtri. Tali curve solitamente mostrano come ci sia una forte dipendenza della prestazione del filtro dalla lunghezza del buffer nei primi  $\tau_{max}$  valori mentre per valori più elevati di  $N$  la curva si appiattisce. Ciò è sintomo del fatto intuitivo che le misure che arrivano con molto ritardo solitamente danno poca informazione al filtro influenzando poco sullo stesso, in particolare più  $Q$  è elevata più tali curve assumono questo andamento. Se, infine, invece delle misure si usano i cosiddetti *smart sensor* che inviano la stima dello stato lo studio è riconducibile a quanto visto finora. In particolare, se è possibile definire  $\tau_t$ , variabile aleatoria tempo variante, che indica il ritardo minimo dei pacchetti arrivati, usando la terminologia adottata finora, in generale allo stimatore si avrà che nel generico istante  $t$  si avrà  $\hat{x}_{t|t}^s = A^{\tau_t} \hat{x}_{t-\tau_t|t-\tau_t}^l$ . Questo approccio presenta il notevole vantaggio di essere indipendente dalle statistiche di arrivo (ottimo a prescindere) e di portare in ogni singolo pacchetto la storia passata delle misure.

<sup>1</sup>Per una buona progettazione è bene conciliare affidabilità e prontezza scegliendo adeguatamente in tal senso il giusto protocollo di comunicazione. Ovviamente tale scelta è fortemente dettata dalla particolare applicazione.

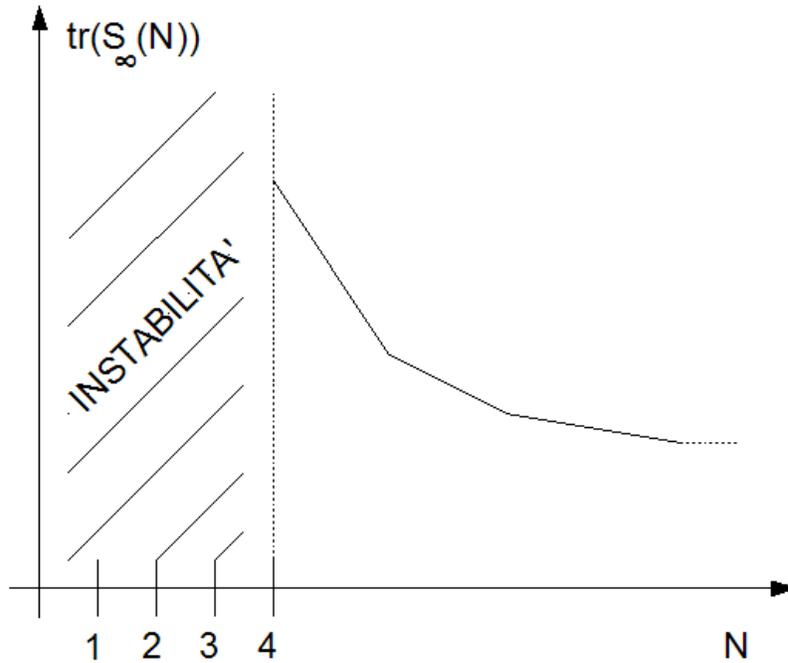


Figure 11.2. Andamento prestazione filtro in funzione della lunghezza del buffer.

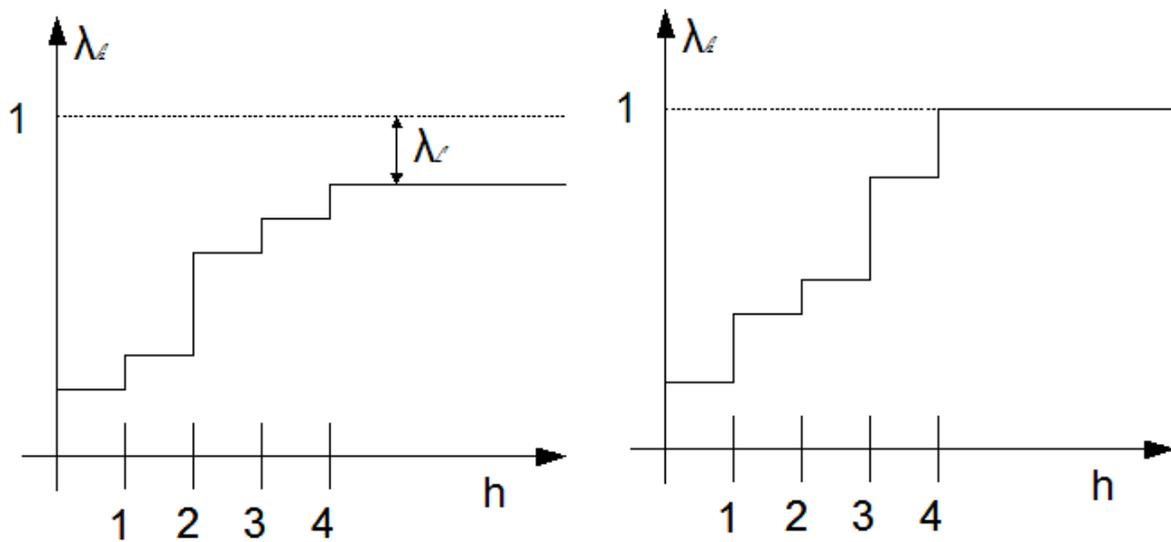
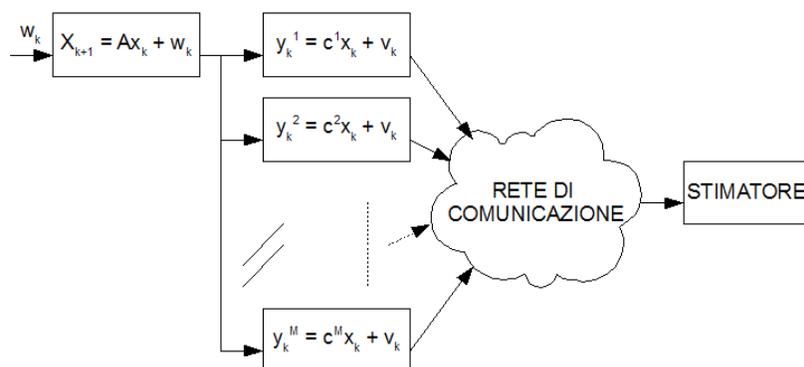


Figure 11.3. Differenza protocolli di comunicazione. Il primo è meno affidabile, ma più pronto. Il secondo è affidabile (certezza di arrivo del pacchetto) ma poco pronto.

## 11.2 Estensione al caso di M sensori

Son stati fin qui studiati dunque casi di filtri a guadagni tempo varianti o costanti nel tempo che inviano allo stimatore le proprie misure e filtri "intelligenti" in cui viene inviata la stima locale fatta da uno stimatore di Kalman implementato nello stesso sensore. Si è partiti dal caso in cui non vi siano perdite di pacchetti per arrivare a studiare il caso in cui vi siano perdite di pacchetti e ritardi di trasmissione aleatori.

Si vede ora il caso in cui sono presenti nella rete di comunicazione  $M$  sensori che inviano tutti la propria misura allo stimatore (come illustrato in figura 11.4) ciascuno avente, in generale, una propria statistica di arrivo.



**Figure 11.4.** Rete di M sensori.

Questa volta il buffer dello stimatore avrà tale struttura:

1	$y_0^1$	0	0	...
2	0	$y_1^2$	$y_2^2$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$
M	$y_0^M$	0	$y_2^M$	...

Diversamente la matrice C può essere costruita dinamicamente ad ogni passo ignorando le righe nulle (riga nulla = misura non pervenuta).

Se il protocollo di comunicazione garantisce l'arrivo delle misure entro un certo intervallo temporale si può costruire un buffer con memoria finita.

Il sistema *plant-sensor-network* è descrivibile tramite le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k^i = C^i x_k + v_k^i \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (11.2)$$

supponendo che i rumori di misura  $v_k^i \sim \mathcal{N}(0, R^i)$  siano scorrelati tra di loro.

Inoltre considerando

$$\gamma_{t,k}^i = \begin{cases} 1; & \text{se } y_k^i \text{ è presente nello stimatore all'istante } t \\ 0; & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si può definire  $\tilde{y}_{t,k}^i = \gamma_{t,k}^i y_k^i = \gamma_{t,k}^i C^i x_k + \gamma_{t,k}^i v_k^i$  per ogni  $i = 1, \dots, M$  quindi

$$\tilde{y}_{t,k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{t,k}^1 C^1 \\ \vdots \\ \gamma_{t,k}^M C^M \end{bmatrix}}_{C_{t,k}} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{t,k}^1 v_k^1 \\ \vdots \\ \gamma_{t,k}^M v_k^M \end{bmatrix}}_{\tilde{v}_{t,k}}$$

dove  $\tilde{v}_{t,k} \sim \mathcal{N}(0, R_{t,k})$  e  $R_{t,k} = \text{diag}(\gamma_{t,k}^1 R_1, \dots, \gamma_{t,k}^M R_M)$ .

In queste ipotesi lo stimatore ottimo tempo-variante si può scrivere come

$$\hat{x}_{k|k}^t = A \hat{x}_{k-1|k-1}^t + (\tilde{y}_{t,k} - C_{t,k} A \hat{x}_{k-1|k-1}^t) = A \hat{x}_{k-1|k-1}^t + \sum_{i=1}^M K_{t,k}^i (\tilde{y}_{t,k}^i - C_{t,k}^i A \hat{x}_{k-1|k-1}^t)$$

dove  $K_{t,k} = [K_{t,k}^1 \dots K_{t,k}^M] \begin{bmatrix} e_{t,k}^1 \\ \vdots \\ e_{t,k}^M \end{bmatrix}$  in cui ogni matrice  $K_j^i$  è di dimensione  $n \times p_i$  dove con  $n$

si è indicata la dimensione dello stato e con  $p_i$  la dimensione dell'uscita del sensore  $i$ -esimo.

Lo stimatore a guadagni costanti ( $M \times N$  guadagni) ha invece la forma

$$\begin{cases} \tilde{x}_{k|k}^t = A \tilde{x}_{k-1|k-1}^t + \sum_{i=1}^M \gamma_{t,k}^i \bar{K}_{t-k}^i (\tilde{y}_{t,k}^i - C^i A \tilde{x}_{k-1|k-1}^t) & k = t - N + 1, \dots, t \\ \tilde{x}_{t-N|t-N}^t = \tilde{x}_{t-N|t-N}^{t-1} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la statistica di arrivo si definisce il ritardo della misura  $y_k^i$ , come ovvia generalizzazione,  $\tau_k^i$  e

$$\lambda_h^i = \mathbb{P}[\tau_k^i \leq h]$$

sono  $M$  variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite che forniscono la statistica dei tempi di arrivo.

Definendo  $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_M]^T$  si può trovare anche nel caso multi-sensore  $\lambda_c$ , anche se risulta essere molto laborioso. Per questo è preferibile procedere "puntualmente" cioè, fissando  $\lambda$  e vedere se è stabile o no.

Nonostante la complessità della soluzione si può comunque dimostrare l'unicità di  $\lambda_c$ .

Per quanto riguarda la stima globale del sistema essa è ricostruibile dalle stime locali se  $v_k^i \perp v_k^j, \forall i \neq j$ . Tale condizione è tuttavia sufficiente, ma non necessaria. Se invece si vuole una stima globale su ogni sensore è possibile inviare la stima globale ricavata in un nodo a tutti i nodi oppure tramite stimatori distribuiti che prevedono lo scambio di misure tra i sensori.