

## Lezione 12 — 15 Maggio

Docente: Luca Schenato

Stesori: Bertinato Marco, Ortolan Giulia, Zambotto Patrizio

## 12.1 Controllo ottimo LQ (Lineare Quadratico)

Dopo aver affrontato il problema della *stima* dello stato in un sistema dinamico, ci si occupa del *controllo* di tale sistema sulla base dell'informazione dello stato acquisita dallo stimatore; si tratterà nel seguito la tecnica del controllo ottimo (detta anche tecnica  $H_2$ ).

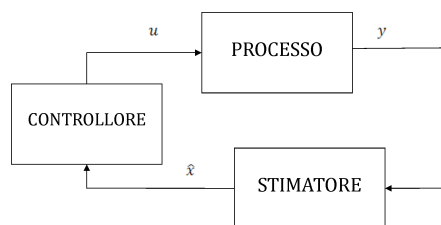


Figure 12.1. Diagramma a blocchi di un sistema con controllo dallo stato stimato.

Le metodologie del controllo ottimo consentono, a differenza di altre (ad es. allocazione degli autovalori), di esprimere direttamente nel dominio del tempo le specifiche sulla dinamica di un sistema anche se non lineare, caratterizzando l'ingresso da applicare come quello che rende minimo (o massimo) un opportuno indice di costo (o di qualità).

Si consideri un sistema lineare discreto deterministico con equazione di stato

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (12.1)$$

dove si suppone assegnato lo stato iniziale  $x(0) = x_0$  e che non vi siano vincoli sui valori delle funzioni di ingresso.

Il problema che ci si pone è quello di determinare un vettore di ingressi  $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_{T-1})$  che, agendo nell'intervallo *finito*  $[0, T]$ , renda minimo il seguente *indice* (o *funzione obiettivo*)

$$J_T(x_0, \mathbf{u}) = x_T^T W_T x_T + \sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T W_k x_k + u_k^T U_k u_k) \quad (12.2)$$

dove le matrici  $W_T$ ,  $W_k$  e  $U_k$  sono semidefinite positive.

Analizzando la struttura di  $J_T(x_0, \mathbf{u})$  in (12.2) si nota che i due addendi che lo compongono danno conto di due aspetti che giocano nella valutazione del comportamento del sistema in  $[0, T]$ :

- $x_T^T W_T x_T$  rappresenta il costo dovuto alla distanza dello stato finale del sistema dallo stato zero;
- $\sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T W_k x_k + u_k^T U_k u_k)$  indica il costo dovuto allo scostamento dallo zero degli stati intermedi e all'energia spesa per il controllo.

Sviluppando l'equazione di aggiornamento dello stato per istanti successivi si ottiene

$$\begin{aligned}x_1 &= Ax_0 + Bu_0 \\x_2 &= Ax_1 + Bu_1 = A^2x_0 + ABu_0 + Bu_1 \\&\vdots \\x_T &= A^T x_0 + \sum_{k=0}^{T-1} A^{T-k-1} Bu_k\end{aligned}$$

da cui, mediante rappresentazione vettoriale con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_T)$  e  $\mathbf{u} = (u_0 \dots u_{T-1})$ , è possibile scrivere il sistema (12.1) come

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} B & 0 & & \\ AB & B & \ddots & \\ A^2B & AB & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \\ A^{T-1}B & & & \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ A^3 \\ \vdots \\ A^T \end{bmatrix} x_0 = F\mathbf{u} + Gx_0 \quad (12.3)$$

dove  $F \in \mathbb{R}^{nT \times mT}$  e  $G \in \mathbb{R}^{nT \times n}$ .

È possibile inoltre riscrivere, utilizzando la forma (12.3), l'espressione dell'indice di costo (12.2) nella seguente forma

$$\begin{aligned}J_T(x_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}^T \underbrace{\begin{bmatrix} W_1 & & 0 \\ & W_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & W_T \end{bmatrix}}_{\triangleq W \geq 0} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \underbrace{\begin{bmatrix} U_1 & & 0 \\ & U_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & U_{T-1} \end{bmatrix}}_{\triangleq U \geq 0} \mathbf{u} + x_0^T W_0 x_0 = \\&= (F\mathbf{u} + Gx_0)^T W (F\mathbf{u} + Gx_0) + \mathbf{u}^T U \mathbf{u} + x_0^T W_0 x_0 = \\&= \mathbf{u}^T F^T W F \mathbf{u} + x_0^T G^T W F \mathbf{u} + \mathbf{u}^T F^T W G x_0 + x_0^T G^T W G x_0 + \mathbf{u}^T U \mathbf{u} + x_0^T W_0 x_0 = \\&= \mathbf{u}^T (F^T W F + U) \mathbf{u} + x_0^T G^T W F \mathbf{u} + \mathbf{u}^T F^T W G x_0 + x_0^T (W_0 + G^T W G) x_0 = \\&= \mathbf{u}^T S_{u,u} \mathbf{u} + x_0^T S_{x_0,u} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T S_{u,x_0}^T x_0 + x_0^T S_{x_0,x_0} x_0\end{aligned}$$

dove sono state definite opportunamente le matrici  $S_{u,u}$ ,  $S_{x_0,u} = S_{u,x_0}^T$  e  $S_{x_0,x_0}$ .

Si vogliono dunque determinare gli ingressi ottimi  $\mathbf{u}^*$  in grado di minimizzare tale funzionale di costo, cioè

$$\mathbf{u}^* = \arg \min_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u}, x_0) \quad (12.4)$$

da cui si ottiene il valore minimo della funzione costo  $J^*(x_0) = \min_{\mathbf{u}} J(x_0, \mathbf{u})$ ; esso è calcolabile in maniera esplicita azzerando la derivata di  $J(\cdot)$  rispetto all'ingresso  $\mathbf{u}$  data da

$$\frac{\partial J_T}{\partial \mathbf{u}} = 2S_{u,u} \mathbf{u} + 2S_{x_0,u} x_0 = 0 \quad (12.5)$$

Si ricava dunque l'ingresso ottimo

$$\mathbf{u}^* = -S_{u,u}^{-1}S_{x_0,u}x_0 \quad (12.6)$$

dove, nel caso in cui la matrice  $S_{u,u}$  non fosse invertibile, l'operazione di inversione viene sostituita da quella di pseudo-inversione.

È possibile osservare come l'ingresso ottimo, cioè che minimizza la funzione costo considerata, dipenda unicamente dalla condizione iniziale  $x_0$ : uno svantaggio di questa dipendenza sta nel fatto che un eventuale cambiamento delle condizioni iniziali implica un nuovo calcolo di tutta la sequenza di ingresso. Con questo approccio è inoltre richiesta l'inversione di matrici di dimensione crescente nel tempo, causando una penalizzazione dal punto di vista computazionale; la particolare struttura triangolare di tali matrici potrà però essere sfruttata per una implementazione più efficiente.

## 12.2 Metodo di programmazione dinamica

Si consideri il problema di determinare il percorso minimo da un punto iniziale ad uno finale in una griglia con ostacoli, associando ad ogni passo un particolare costo.

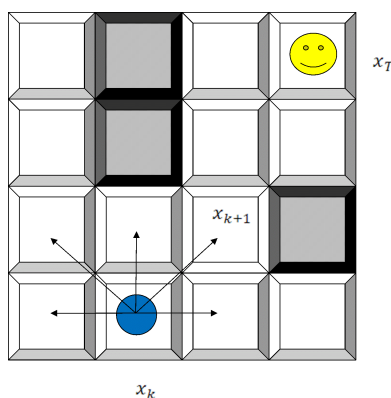


Figure 12.2. Griglia con ostacoli

L'obiettivo ora è quello di voler minimizzare la funzione

$$V_k^*(x_k) = \min_{u_k} [c(x_k, u_k) + V_{k+1}^*(x_{k+1})] \quad (12.7)$$

dove  $c_k$  rappresenta il costo per giungere nello stato  $x_{k+1}$  dallo stato  $x_k$ , mentre il termine  $V_{k+1}^*(x_{k+1})$  indica il costo rimanente dallo stato  $x_{k+1}$  allo stato finale. Nota l'equazione di aggiornamento dello stato

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (12.8)$$

e il costo di un passo

$$c(x_k, u_k) = x_k^T W x_k + u_k^T U u_k \quad (12.9)$$

è possibile riscrivere l'equazione (12.7) come

$$V_k^*(x_k) = \min_{u_k} \left\{ x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + \sum_{l=k+1}^{T-1} (x_l^T W x_l + u_l^T U u_l) + x_T^T W x_T \right\} \quad (12.10)$$

dove si vede banalmente, con riferimento alla (12.2), che  $J^*(x_0) = V_0^*(x_0)$ .

A questo punto ci si prefigge l'obiettivo di ottenere una soluzione esplicita della (12.10); questo viene ottenuto

nel seguente teorema.

**Teorema 12.1.** *La funzione a costo minimo per il sistema dinamico (12.8) con costo di un passo pari a (12.9) vale*

$$V_k^*(x_k) = x_k^T S_k x_k \quad (12.11)$$

dove  $S_k$  è la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati

$$\begin{aligned} S_k &= A^T S_{k+1} A - A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A + W \\ S_T &= W = W_T \quad (\text{condizione finale}) \end{aligned} \quad (12.12)$$

**Dimostrazione:** La dimostrazione viene ottenuta per induzione. Per  $k = T$  si verifica che  $S_T = W_T$ ; in tale istante non vi è più nessun controllo in quanto l'ultimo ingresso di controllo è  $u_{T-1}$ .

Supponendo che quanto detto sia vero al passo  $k + 1$ , cioè  $V_{k+1}^*(x_{k+1}) = x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1}$ , si dimostra la validità anche al passo  $k$ .

Sostituendo in (12.7) l'espressione di  $V_{k+1}^*(x_{k+1})$  e considerando l'ipotesi precedente si ottiene

$$\begin{aligned} V_k^*(x_k) &= \min_{u_k} \{ x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1} \} \\ &= \min_{u_k} \{ x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + (Ax_k + Bu_k)^T S_{k+1} (Ax_k + Bu_k) \} \\ &= \min_{u_k} \{ x_k^T (W + A^T S_{k+1} A) x_k + u_k^T (U + B^T S_{k+1} B) u_k + 2u_k^T A^T S_{k+1} B x_k \} \\ &= x_k^T (W + A^T S_{k+1} A) x_k + \min_{u_k} \{ u_k^T (U + B^T S_{k+1} B) u_k + 2u_k^T B^T S_{k+1} A x_k \} \end{aligned} \quad (12.13)$$

Per determinare l'ingresso ottimo  $u_k^*$  si determina il punto di minimo della funzione semidefinita positiva  $V_k^*$ ; si calcola la derivata della funzione da minimizzare e, ponendola uguale a zero,

$$\frac{\partial}{\partial u_k} (u_k^T (B^T S_{k+1} B + U) u_k + 2u_k^T B^T S_{k+1} A x_k) = 0$$

$$2 (B^T S_{k+1} B + U) u_k + 2B^T S_{k+1} A x_k = 0$$

si arriva a determinare

$$\mathbf{u}^* = - (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A x_k = L_k x_k \quad (12.14)$$

Si ottiene quindi un ingresso ottimo  $\mathbf{u}^*$  lineare con lo stato  $\mathbf{x}$  mediante un guadagno

$$L_k \triangleq - (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A \quad (12.15)$$

Sostituendo nell'equazione (12.13) l'espressione dell'ingresso ottimo (12.14) si giunge ad una formulazione di  $V^*(x_k)$  funzione solamente dello stato

$$V^*(x_k) = x_k^T \underbrace{(A^T S_{k+1} A + W - A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A)}_{\triangleq S_k} x_k = x_k^T S_k x_k \quad (12.16)$$

Si è quindi dimostrato che  $V_k^*(x_k) = x_k^T S_k x_k$  dove  $S_k$  viene definita come la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati. □

Quindi, per risolvere in maniera efficiente il problema del controllo ottimo ad orizzonte finito si devono calcolare le varie matrici  $S_k$  soluzioni dell'equazione alle differenze di Riccati (12.12) a partire dalla condizione finale  $S_T = W_T$ . L'ingresso ottimo si ricava come retroazione dallo stato

$$u_k^* = L_k x_k$$

dove la matrice di retroazione  $L_k$  si calcola a partire da  $S_{k+1}$ , con

$$L_k = - (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A$$

### 12.3 Dualità col filtro di Kalman

È interessante osservare una dualità tra il controllo ottimo LQ e lo stimatore ottimo di Kalman operando le sostituzioni:

LQ	Kalman
$\Sigma = (A, B, C)$	$\Sigma_d = (A^T, C^T, B^T)$
$S_T$	$P_0$
$S_{T-k}$	$P_{k k-1}$
$W$	$Q$
$U$	$R$
$(A, B)$ stabilizzabile	$(A, C)$ rivelabile
$(A, W^{1/2})$ rivelabile	$(A, Q^{1/2})$ stabilizzabile
$\lim_{T \rightarrow +\infty} S_0 = S_\infty$	$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_{k k-1} = P_\infty$

Per queste ragioni, tutti i teoremi visti per il filtro di Kalman relativi all'esistenza e unicità del limite di  $P_{k|k-1}$  si possono applicare direttamente a  $S_k$  e quindi al sistema retroazionato con  $L_k$  per quel che riguarda la stabilità.