PSC: Progettazione di sistemi di controllo **III Trim. 2007**

Lezione 13 — Maggio 16

Docente: Luca Schenato *Stesori: Comin, Dal Bianco,Fabris, Parmeggiani*

13.1 Ricapitolazione del Controllo Ottimo LQ

Ripassiamo quanto fatto finora sul controllo ottimo LQ.

Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k; \\ y_k &= Cx_k; \\ k &= 0, \dots, T \end{aligned}$$

del quale si desidera calcolare una successione di ingresso $\{u = (u_0, \dots, u_{T-1})\}$ che minimizza un dato indice di costo quadratico, definito come segue:

$$J_T(x, u) = \sum_{k=0}^{T-1} \left(x_k^T W x_k + u_k^T U u_k \right) + x_T^T W x_T; \qquad W \geq 0, U \geq 0 \tag{13.1}$$

Vale a dire, si desidera risolvere il problema di minimo:

$$J_T^*(x_0) = \min_u \; J_T\left(x_0, u\right)$$

Considerando la condizione iniziale:

$$S_T = W_T$$

Si cerca di risolvere ricorsivamente la varianza d'errore:

$$S_k = A^T S_{k+1} A + W - A^T S_{k+1} B \left(B^T S_{k+1} B + U \right)^{-1} B^T S_{k+1} A = \Phi_d(S_{k+1})$$

Il valore ottimo dei campioni di ingresso, che minimizzano la (13.1), risulta essere combinazione lineare dello stato:

$$u_k^* = -\left(B^T S_{k+1} B + U \right)^{-1} B^T S_{k+1} A x_k = L_k x_k \tag{13.2}$$

Si può dunque calcolare il costo ottimo come:

$$J_T^*(x_0) = x_0^T S_0 x_0$$

Dalle relazioni trovate si possono dedurre le seguenti proprietà:

1. Il controllo ottimo risulta una combinazione lineare degli ingressi.
2. Il costo ottimo dipende soltanto dalle condizioni iniziali.
3. Il guadagno ottimo L_k è *tempo variante*.
4. La varianza $\Phi_d(S)$ risulta il duale della $\Phi(P)$ attuando le sostituzioni:

$$A \to A^T; B \to C^T; W \to Q; U \to R; S \to P;$$

Ci siamo poi posti il problema di calcolare l'ingresso ottimo nel caso di orizzonte temporale infinito, vale a dire considerando $T \longrightarrow \infty$. In questo caso sono sorte le seguenti domande:

- La successione di matrici S_k converge ad una matrice S_∞?
  C'è convergenza se e solo se la coppia (A, B) è stabilizzabile.
- La matrice S_∞ così calcolata è unica?
  Si è visto che c'è unicità se la coppia $(A, W^{1/2})$ è rivelabile.

Nel caso duale di orizzonte infinito, in cui $S_k \longrightarrow S_\infty$, anche la matrice guadagno L_k converge ad un valore di regime calcolabile, considerando la (13.2), come:

$$L_K \to L_\infty = -\left(B^T S_\infty B + U\right)^{-1} B^T S_\infty A$$

5. La matrice $(A - BL_\infty)$ è strettamente stabile. Il controllo ottimo fornisce dunque una retroazione di stato stabilizzante.
6. Se il sistema è di tipo SISO il controllo ricavato fornisce un margine di fase $m_\phi \geq 60°$
7. Una possibile scelta empirica per W ed U è la forma diagonale. Nel caso di dimensione $n = 2$ risulta della forma:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{|x_1|^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{|x_2|^2} \end{bmatrix}; \quad U = \rho \left[\frac{1}{|\overline{u}|^2}\right]$$

dove $|x_1|^2$ deve avere lo stesso ordine di grandezza dell'errore sulla componente x_1 che ci si aspetta. Tale valore in genere ottenuto da conoscenze a priori del sistema o dall'esperienza. Il parametro $\rho \in \mathbb{R}$ scelto in modo da ottenere penalizzare l'ingresso se questo tende a saturare gli ingressi, cioe' a ρ maggiori corrisponde un sistema piu' lento ma con ingressi u di controllo piu' piccoli.

8. Il controllo ottimo non da alcun indice sul transitorio oppure sulla capacità di reiezione dei disturbi del sistema retroazionato.

NOTA:La tecnica di controllo LQ viene anche detta controllo ottimo (H_2). Questo metodo, diffuso fino agli anni '60-70, sebbene fornisca in modo rapido dei controllori con buone prestazione nella maggior parte dei casi, risulta essere robusto variazioni parametriche. Successivamente negli anni '80-'90 e' stato sviluppato il controllo (H_∞) che risulta essere piu' performante ed efficiente.

13.2 Controllo Ottimo LQG

Si desidera ora calcolare la sequenza di ingressi ottimi per un sistema dinamico lineare non più deterministico, bensì stocastico:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k & = & Cx_k + v_k \\ k & = & 0, \ldots, T \end{array} \right. \tag{13.3}$$

dove le variabili aleatorie w_k e v_k sono Gaussiane a media nulla:

$$\begin{array}{rcll} w_k & \sim & \mathcal{N}(0, Q), & \quad Q \geq 0 \\ v_k & \sim & \mathcal{N}(0, R), & \quad R \geq 0 \end{array}$$

Esattamente come nel caso deterministico, si ricerca la sequenza di ingressi $\{u = (u_0, \ldots, u_{T-1})\}$ che minimizzano l'indice di costo quadratico:

$$J_T(x, u) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{T-1}\left(x_k^T W x_k + u_k^T U u_k\right) + x_T^T W x_T\right], \qquad W, U \geq 0 \tag{13.4}$$

Vale a dire, si desidera calcolare

$$u_k^* = f_k\left(u_0, ..., u_{k-1}, y_0, ..., y_k\right), \quad k = 0, \ldots, T$$

tale da risolvere il problema di minimo:

$$\underset{u}{min}\ J_T\left(u_0, ..., u_{T-1}, x_0\right)$$

È da notare che nella definizione della funzione costo (13.4) si è fatto uso dell'operatore di aspettazione. Infatti questa volta la traiettoria di stato $\{x_k\}$ è un processo aleatorio, e di conseguenza non ne possiamo conoscere le particolari realizzazioni.

13.2.1 Filtro di Kalman con ingressi

In questo caso l'espressione del filtro tiene conto anche dei segnali di ingresso u:

$$\hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}\left[x_k | y_k, ..., y_0, u_k, ..., u_0\right]$$

Ricordando che c'è scorrelazione tra $e_{k|k}$ e $\hat{x}_{k|k}$, si calcola la predizione

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= \mathbb{E}\left[x_{k+1} | y_k, ..., y_0, u_k, ..., u_0\right] \\ &= \mathbb{E}\left[Ax_k + Bu_k + w_k | y_k, ..., y_0, u_k, ..., u_0\right] \\ &= A\mathbb{E}\left[x_k | y_k, ..., y_0, u_{k-1}, ..., u_0\right] + Bu_k \\ &= A\hat{x}_{k|k} + Bk \end{aligned}$$

Calcolando l'errore di predizione:

$$\begin{aligned} e_{k+1|k} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} \\ &= Ax_k + Bu_k + w_k - (A\hat{x}_k + Bu_k) \\ &= Ax_k - A\hat{x}_{k|k} + w_k \end{aligned}$$

Si nota che l'errore è indipendente dall'ingresso. La varianza d'errore diviene:

$$P_{k+1|k} = AP_{k|k}A^T + Q$$

Per quanto riguarda l'aggiornamento d'errore di stima:

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1|k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1|k})$$

mentre la varianza dell'errrore di predizione

$$P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T(CP_{k+1|k}C^T + R)^{-1}CP_{k+1|k}$$

Se ne deduce che:

1. Le equazioni varianza d'errore e il guadagno K sono indipendenti dall'ingresso u;
2. L'unica differenza rispetto al filtro senza ingressi è l'aggiunta di u nell'equazione di predizione della stima.
3. Come conseguenza della 1. si trova che $e_{k|k} \perp \hat{x}_{k|k}$ cioè la stima ottima è scorrelata dal suo errore

$$\mathbb{E}\left[e_{k|k}\hat{x}_{k|k}^T | y_k, ..., y_0, u_{k-1}, ..., u_0\right] = 0$$

Adesso ci si pone il problema di trovare degli ingressi u tali da minimizzare una funzione costo ottimo V_k^* dal passo k a T e si calcola ricorsivamente per $k = T, T-1, \ldots, 0$:

$$V_k^*(x_k) \triangleq \min_{u_K} \left(\mathbb{E} \left[\underbrace{x_k^T W x_k + u_k^T U u_k}_{costo\ attuale\ C(x_k, u_k)} + V_{k+1}^*(x_{k+1}) | Y_k, U_{k-1} \right] \right) \tag{13.5}$$

dove sono stati definiti gli spazi

$$Y_k = (y_0, ..., y_k)\,, U_k = (u_0, ..., u_k)$$

Ed il costo ottimo all'istante finale

$$V_0^*(x_0) = J_T^*(x_0) \tag{13.6}$$

Per il calcolo esplicito dei costi (13.5) sarà utile dimostrare il seguente teorema.

Teorema 13.1. *La funzione costo ottimo V_k^* per ogni passo $k = 0, \ldots, T$ è pari a*

$$V_k^*(x_k) = \mathbb{E}\left[x_k^T S_k x_k | Y_k, U_{k-1}\right] + c_k \tag{13.7}$$

dove S_k è una matrice $(n \times n)$ semidefinita positiva e c_k uno scalare non negativo, $c_k \in \mathbb{R}, c_k \geq 0$.

***Dimostrazione*:** La dimostrazione si esegue per induzione su k.

1. (caso base) $k = T$. $S_T = W$, $c_T = 0$ per definizione (13.6).
2. (passo induttivo) supponiamo che (13.7) sia vera per $k+1$, dimostreremo che vale anche per k.

   Per ipotesi si puó dunque scrivere

$$\begin{aligned} V_k^*(x_k) &= \min_{u_k} \mathbb{E}\Big[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + \mathbb{E}\left[x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1} | Y_{k+1}, U_k\right] + \\ &\quad + c_{k+1} | Y_k, U_{k-1}\Big] \end{aligned}$$

   Ma, considerando che

$$\begin{aligned} Y_{k+1} &= y_{k+1} \cup Y_k \\ U_k &= u_k \cup U_{k-1} \end{aligned}$$

   e per le proprietà dell'aspettazione, si può scrivere

$$V_k^*(x_k) = \min_{u_k} \mathbb{E}\Big[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1} + c_{k+1} | Y_k, U_{k-1}\Big] \tag{13.8}$$

Usando ora le (13.3),

$$
\begin{aligned}
V_k^*(x_k) &= \underset{u_k}{min}\ \mathbb{E}\Big[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + (Ax_k + Bu_k + w_k)^T S_{k+1} (Ax_k + Bu_k + w_k) + \\
&\quad + c_{k+1} | Y_k, U_{k-1}\Big] \\
&= \underset{u_k}{min}\ \mathbb{E}\Big[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + 2x_k^T A^T S_{k+1} B u_k + \\
&\quad + u_k^T S_{k+1} u_k + w_k^T S_{k+1} w_k + 2w_k^T S_{k+1}(Ax_k + Bu_k) + c_{k+1} | Y_k, U_{k-1}\Big]
\end{aligned}
$$

Ma, dato che x_k e u_k sono scorrelati da w_k,

$$
\mathbb{E}\left[2w_k^T S_{k+1}(Ax_k + Bu_k)\right] = 0
$$

e tenuto conto che gli ingressi sono una funzione del tipo $u_k = \mathbf{f}_k(U_{k-1}, Y_k)$ risulta

$$
\begin{aligned}
V_k^*(x_k) &= \mathbb{E}\Big[x_k^T W x_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + c_{k+1} | Y_k, U_{k-1}\Big] + \mathbb{E}\Big[w_k^T S_{k+1} w_k\Big] + \\
&\quad + \underset{u_k}{min}\ \Big[u_k^T \left(U + B^T S_{k+1} B\right) u_k + 2u_k^T B^T S_{k+1} A \mathbb{E}\left[x_k | Y_k, U_{k-1}\right]\Big]
\end{aligned}
$$

Inoltre, sfruttando le proprietà dell'operatore traccia:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\underbrace{w_k^T S_{k+1} w_k}_{\text{è scalare}}\Big] &= tr\left(\mathbb{E}\left[w_k^T S_{k+1} w_k\right]\right) &= \mathbb{E}\left[tr\left(w_k^T S_{k+1} w_k\right)\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[tr\left(S_{k+1} w_k w_k^T\right)\right] &= tr\left(S_{k+1} Q\right)
\end{aligned}
$$

scriviamo

$$
\begin{aligned}
V_k^*(x_k) &= \mathbb{E}\left[x_k^T W x_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k | Y_k, U_{k-1}\right] + tr\left(S_{k+1} Q\right) + \\
&\quad + \underset{u_k}{min}\ \Big(u_k^T \left(U + B^T S_{k+1} B\right) u_k + 2u_k^T B^T S_{k+1} A \mathbb{E}\left[x_k | Y_k, U_{k-1}\right]\Big)
\end{aligned}
$$

Ma, per definizione

$$
\mathbb{E}\left[x_k | Y_k, U_{k-1}\right] = \hat{x}_{k|k}
$$

Di conseguenza l'ingresso ottimo u_k^* che minimizza V_k^* vale

$$
u_k^* = -\left(B^T S_{k+1} B + U\right)^{-1} B^T S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} = L_k^* \hat{x}_{k|k}
$$

e risulta essere combinazione lineare della stima di stato $\hat{x}_{k|k}$.
Si ottiene allora:

$$
\begin{aligned}
V_k^*(x_k) &= \mathbb{E}\left[x_k^T W x_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k | Y_k, U_{k-1}\right] + tr\left(Q S_{k+1}\right) - \\
&\quad - \mathbb{E}\left[\hat{x}_{k|k}^T A^T S_{k+1} B \left(U + B^T S_{k+1} B\right) B^T S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} | Y_k, U_{k-1}\right] + c_{k+1}
\end{aligned}
\tag{13.9}
$$

Ricordando che vale sempre la proprietà

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[x_k^T V x_k | Y_k, U_{k-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\left(x_k - \hat{x}_{k|k} + \hat{x}_{k|k}\right)^T V \left(x_k - \hat{x}_{k|k} + \hat{x}_{k|k}\right) | Y_k, U_{k-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right)^T V \left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right) | Y_k, U_{k-1}\right] + \\
&\quad +2\mathbb{E}\left[\left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right)^T V \hat{x}_{k|k} | Y_k, U_{k-1}\right] + \mathbb{E}\left[\hat{x}_{k|k}^T V \hat{x}_{k|k} | Y_k, U_{k-1}\right] \\
&= tr\left(V P_{k|k}\right) + 0 + \hat{x}_{k|k}^T V \hat{x}_{k|k}
\end{aligned}$$

e ponendo in quest'ultima

$$V = A^T S_{k+1} B \left(U + B^T S_{k+1} B\right) B^T S_{k+1} A$$

la (13.9) diviene

$$\begin{aligned}
V_k^*(x_k) &= \mathbb{E}\left[x_k^T \left(W + A^T S_{k+1} A - A^T S_{k+1} B \left(B^T S_{k+1} B + U\right)^{-1} B^T S_{k+1} A\right) x_k | Y_k, U_{k-1}\right] + \\
&\quad + tr\left(S_{k+1} Q\right) + tr\left(P_{k|k} V\right) + c_{k+1}
\end{aligned} \tag{13.10}$$

La dimostrazione della proposizione è così conclusa se si definiscono la matrice S_k

$$S_k = A^T S_{k+1} A + W - A^T S_{k+1} B \left(B^T S_{k+1} B + U\right)^{-1} B^T S_{k+1} A \tag{13.11}$$

e lo scalare

$$c_k = c_{k+1} + tr\left(Q S_{k+1}\right) + tr\left(V P_{k|k}\right) \tag{13.12}$$

□

La dimostrazione precedente ci fornisce un metodo ricorsivo per il calcolo dell'ingresso ottimo, tramite la (2), e per l'aggiornamento delle matrici S_k e degli scalari c_k, tramite le equazioni (13.11) e (13.12).

Si ottiene infine che il costo minimo risulta pari a

$$J_T^* = V_o^*(x_0) = \mathbb{E}\left[x_0^T S_0 x_0\right] + \sum_{k=1}^{T-1} tr\left(Q S_{k+1} + P_{k|k} V_k\right)$$

dove il primo addendo dipende dallo stato iniziale, mentre il secondo è il termine dovuto al rumore.

In conclusione abbiamo visto che nel controllo ottimo LQG vale il principio di separazione in particolare è la serie di un filtro di Kalman e di un controllo LQ:

$$u_k^* = -L_k^* \hat{x}_{k|k}$$