

Lezione 14 — Maggio 17

Docente: Luca Schenato

Stesori: Comin, Dal Bianco, Fabris, Parmeggiani

14.1 Controllo ottimo LQG

Consideriamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\tag{14.1}$$

dove $w_k \sim N(0, Q)$ e $v_k \sim N(0, R)$ sono rispettivamente gli errori di modello e di uscita. Sia inoltre

$$J_T(x_0, u) = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T W x_k + u_k^T U u_k) + x_T^T W_T x_T \right]\tag{14.2}$$

la funzione costo, con W, U, W_T matrici quadrate semidefinite positive.

Il problema consiste nella scelta degli ingressi u_k per $k = 0, \dots, T-1$ che rendono minimo il funzionale J_T , ovvero:

$$J_T^*(x_0) = \min_{u_k} J_T(x_0, u)$$

Definendo la nuova funzione

$$V_k^*(x_k) \triangleq \min_u \mathbb{E}[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + V_{k+1}^*(x_{k+1}) | U_{k+1}, Y_k]$$

vale la relazione

$$J_T^*(x) = V_0^*(x_0)$$

Usando l'operatore duale per il filtro Riccati S_k definita in precedenza

$$S_k = \Phi_d(S_{k+1})$$

si ottiene

$$V_k^*(x_k) = \mathbb{E} [x_k^T S_k x_k | U_{k-1}, Y_k] + c_k$$

in cui si pone

$$S_T = W_T, \quad c_T = 0$$

c_k è uguale a

$$c_k = c_{k+1} + \text{tr}(QS_{k+1}) + \text{tr}(P_{k|k}(A^T S_k A + W - S_{k+1}))$$

Sostituendo nella funzione costo si ricava:

$$J_T^*(x_0) = \mathbb{E} [x_0^T S_0 x_0 | y_0] + \sum_{k=0}^{T-1} tr(QS_{k+1}) + tr(P_{k|k}(A^T S_k A + W - S_{k+1}))$$

L'equazione del controllore risulta

$$u_k = L_k \hat{x}_{k|k}$$

dove $\hat{x}_{k|k}$ è la stima del filtro di Kalman

$$\hat{x}_{k|k} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1} + K_{k|k}(y_k - CA\hat{x}_{k-1|k-1})$$

con

$$K_{k|k} = f(P_{k|k-1}) \quad P_{k+1|k} = \phi(P_{k|k-1})$$

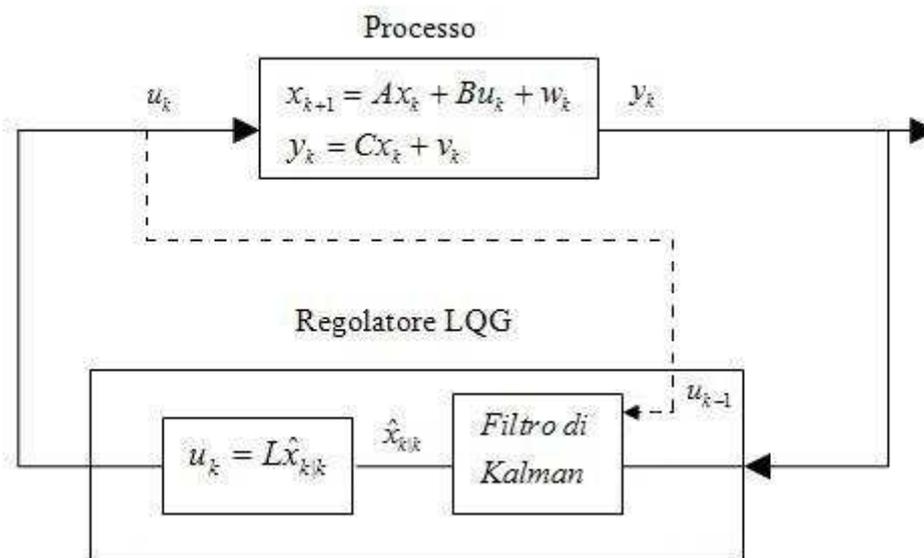


Figura 14.1.

Si consideri ora il caso di avere un orizzonte ∞ .

Per $T \rightarrow \infty$:

$$J_\infty^*(x_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_T^*(x_0) \Leftrightarrow S_k < M, \quad P_{k|k} < \infty$$

Se $S_k \rightarrow S_\infty$ e se $P_{k|k} \rightarrow P_\infty$, la funzione costo esiste e vale

$$J_\infty^*(x_0) \rightarrow \frac{1}{T} \mathbb{E} [x_0^T S_0 x_0 | y_0] + tr(QS_\infty) + tr(P_\infty(A^T S_\infty A + W - S_\infty))$$

da cui visto che il primo termine tende a zero per $T \rightarrow \infty$

$$J_\infty^*(x_0) \rightarrow +tr(QS_\infty) + tr(P_\infty(A^T S_\infty A + W - S_\infty))$$

ovvero

$$L_k \rightarrow L_{LQ}, \quad K_{k|k} \rightarrow K_{klm}$$

Il regolatore LQG allora diventa tempo invariante ed è paragonabile a una funzione di trasferimento.

Il prossimo passo è chiedersi cosa succede se non c'è un canale ideale tra l'uscita del processo y e l'ingresso del regolatore, per esempio se è presente una rete di comunicazione che introduce perdite di pacchetti e ritardi aleatori.

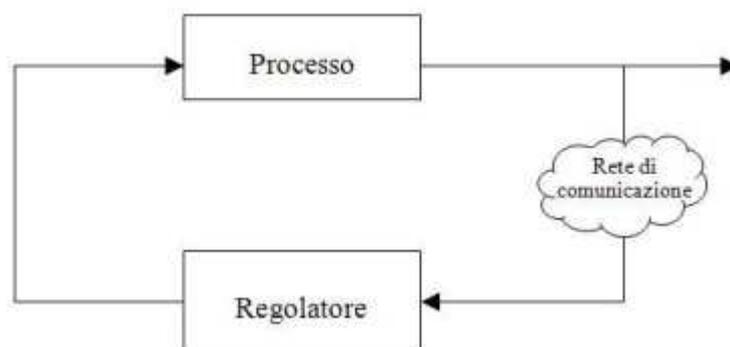


Figura 14.2.

La funzione costo diventa:

$$V_k^*(x_k) = \min_{u_k} \mathbb{E} \left[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + V_{k+1}^*(x_{k+1}) \mid U_{k-1}, \tilde{Y}_k^t, \gamma_k \right]$$

In questa configurazione vale ancora il principio di separazione fra controllore e stimatore: la prestazione sicuramente degrada e il filtro di Kalman avrà memoria finita e sarà tempo variante anche a orizzonte infinito.

Ci mettiamo ora nel caso in cui ci sia una rete di comunicazioni anche tra il controllore e l'attuatore:

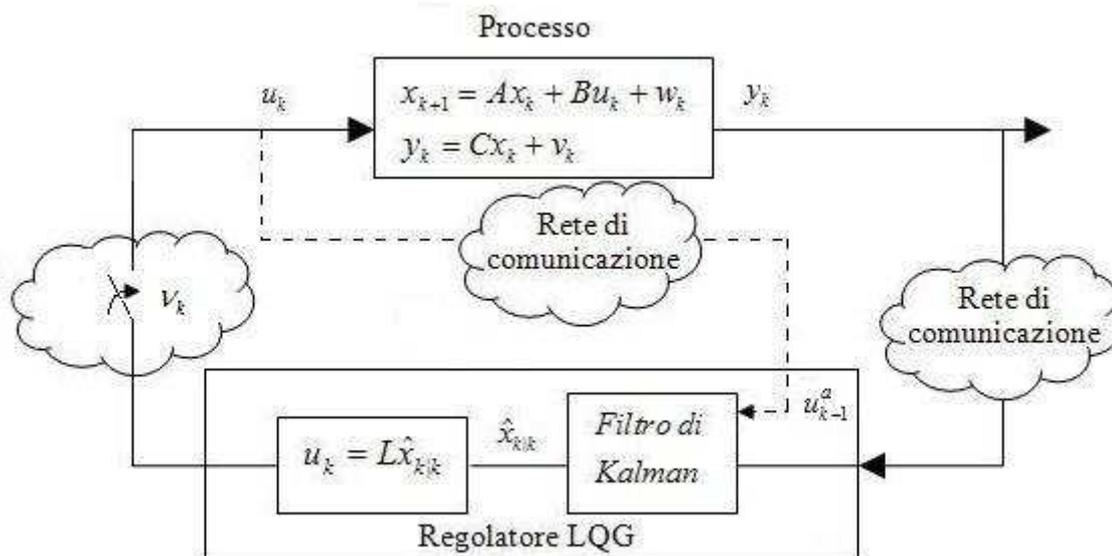


Figura 14.3.

Consideriamo per ora solo il caso con perdita di pacchetti definiamo

$$\nu_k = \begin{cases} 1 & \text{se il pacchetto arriva} \\ 0 & \text{se il pacchetto non arriva} \end{cases}$$

Ovviamente se $\nu_k = 1$, $u_k^a = u_k^c$, ovvero l'ingresso all'attuatore è quello calcolato dal controllore.

Se $\nu_k = 0$ ci sono varie possibilità di scelta:

- $u_k^a = 0$: l'attuatore fornisce un ingresso al processo nullo;
- $u_k^a = u_{k-1}^a$: viene mantenuto l'ingresso precedente;
- $u_k^a = pu_{k-1}^a + (1-p)0$, con $p \in [0, 1]$: l'ingresso al processo è una combinazione lineare dei due casi precedenti.

Esistono inoltre alcune strategie alternative per ovviare al problema:

1. Spostare il regolatore all'attuatore (non sempre possibile)
2. Implementare il predittore u_k^c all'attuatore e porre quindi $u_k^a = \hat{u}_{k|k}^c$ (configurazione particolarmente difficile e onerosa)
3. Mandare dal controllore un pacchetto con: $u_{k|k}^c, u_{k+1|k}^c, \dots, u_{k+T|k}^c$, con T orizzonte di predizione (l'attuatore utilizza poi l'ingresso predetto dal controllore all'istante corrispondente se il pacchetto viene perso)

Caso 1

È possibile usare una architettura del tipo di Figura 11.4

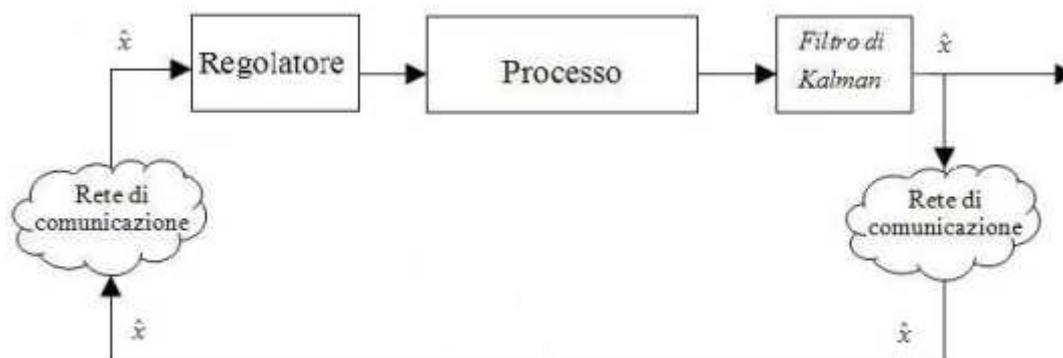


Figura 14.4.

dove c'è la possibilità di costruire il regolatore ottimo data l'architettura utilizzata. La soluzione migliore resta comunque quella di mandare le misure in uscita dal processo direttamente alla rete di comunicazione.

Se vengono mandate invece le stime, riferendosi alla Figura 11.5

nel blocchetto Kalman tempo-variante con memoria finita l'equazione diventa:

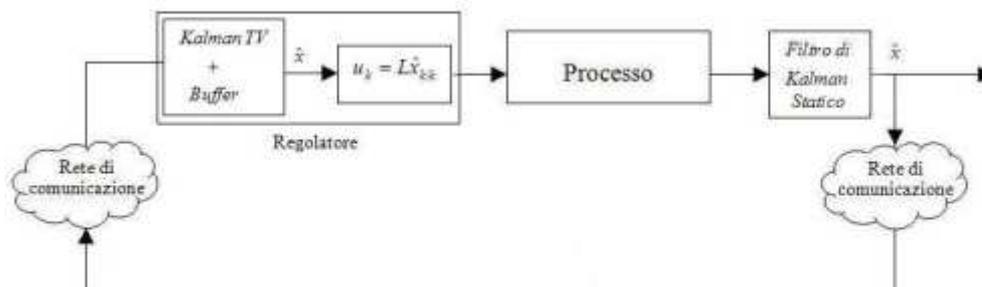


Figura 14.5.

$$\hat{x}_{k|k}^a = A^{k-h} \hat{x}_{h|h}^s + A^{k-h-1} B u_h^a + A^{k-h-2} B u_{h+1}^a + \dots + B u_{k-1}^a$$

Fino all'istante h-esimo si hanno a disposizione le misure, che vengono quindi considerate come condizioni iniziali per la stima al sensore. Da queste si ricalcola la stima attuale ottima all'attuatore partendo da $\hat{x}_{h|h}^s$ e utilizzando gli ingressi fino all'istante precedente.

Caso 2

In questo caso il problema è piuttosto complicato: non si riescono a progettare le matrici A , B , C , D del caso lineare tempo-invariante; per esempio c'è aleatorietà anche solo nella dimensione della matrice A .

Caso 3

In questo caso infine non c'è nulla da progettare, in quanto l'architettura stessa fornisce già l'informazione necessaria su come adattare l'orizzonte temporale di predizione.

Si suppone ora il caso semplice di realizzazione di Figura 11.6

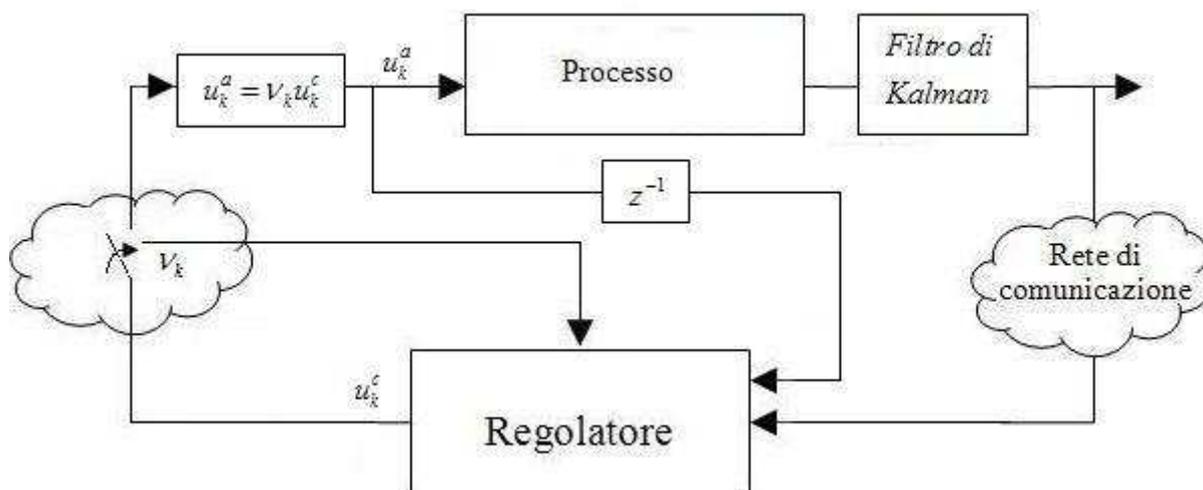


Figura 14.6.

Le stime sono date da

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k|k} &= \mathbb{E}[x_k | y_k, \dots, y_0, \gamma_k, \dots, \gamma_0, \nu_{k-1}, \dots, \nu_0] \\ &= A\hat{x}_{k-1|k-1} + B\nu_{k-1}^a + K_{k|k}(y_k - CA\hat{x}_{k-1|k-1})\end{aligned}$$

Le matrici di varianza di errore di predizione $P_{k+1|k}$ e di aggiornamento $P_{k|k}$ non cambiano. Se si ha a disposizione la sequenza ν_k , si conosce esattamente l'ingresso al processo all'istante precedente $k-1$. Quest'informazione viene quindi utilizzata come ingresso al regolatore che è costituito da un filtro di Kalman tempo variante e il controllore ottimo LQ e la stima all'istante k risulta

$$\hat{x}_{k|k} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + B\nu_{k-1}^a + K_{k|k}(y_k - CA\hat{x}_{k-1|k-1})$$

Per il controllo LQG vale ancora

$$J_T = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^T x_k^T W_k x_k + u_k^{aT} U u_k^a \right]$$

con $u_k = f_k(y_k, y_{k-1}, \dots, y_0, \nu_{k-1}, \dots, \nu_0, u_{k-1}^c, \dots, u_0^c)$.

Vale ancora il principio di separazione, con l'unica differenza che come si vede da Figura 11.7

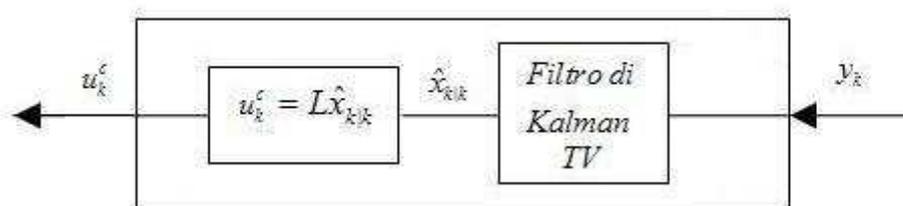


Figura 14.7.

il vettore L dei guadagni del controllore è dato dalla funzione $S_\infty = \phi_{d,\bar{\nu}}(S_\infty)$, con $\bar{\nu} = \mathbb{P}[\nu_k = 1]$ e $\phi_{d,\bar{\nu}}$ duale di ϕ_λ .

Nel caso non ci sia informazione sulla sequenza di ingressi fino all'istante $k-1$, la cosa migliore da fare è realizzare lo stimatore come

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= A\hat{x}_{k-1|k-1} + B\bar{\nu}u_{k-1}^c + K_{k|k}(y_k - CA\hat{x}_{k-1|k-1}) \\ \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k} + \bar{\nu}Bu_k^c \\ e_{k+1|k} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k} = Ae_{k|k} + (\nu_k - \bar{\nu})Bu_k^c + w_k \\ P_{k+1|k} &= f(P_{k|k}, u_k^c) \end{aligned}$$

In questo caso però non vale più il principio di separazione in quanto J_T non è più lineare, e l'ottimizzazione di L e K non è più un problema di ottimizzazione convessa.