PSC: Progettazione di sistemi di controllo	III Trim. 2007
Lezione 15 — Maggio 21	
Docente: Luca Schenato	*Stesori: A. Agnoli*

15.1 Stima distribuita

Sia dato un vettore aleatorio gaussiano x di media x_0 e varianza P. Siano poi date le misure y_i di x raccolte da N sensori affetti da rumore

$$y_i = C_i x + v_i, \quad i = 1, \dots, N, \tag{15.1}$$

dove i rumori di misura v_i sono variabili aleatorie gaussiane di media nulla e varianza R_i. Si ipotizzi che i rumori di misurano siano mutuamente scorrelati ($v_i \perp v_j, i \neq j$) e scorrelati anche dalla grandezza da misurare x ($v_i \perp x \, \forall i$). Si denoti con y il vettore di tutte le misure raccolte:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = Cx + v \tag{15.2}$$

Dalla mutua scorrelazione dei rumori di misura discende il fatto che la varianza del vettore v è diagonale:

$$v \sim \mathcal{N}(0, diag(R_1, \dots, R_N)) \tag{15.3}$$

Com'é noto da [1, pag. 28 e seguenti] nel caso di modello lineare $y = Cx + v$, lo stimatore a minima varianza d'errore é lineare ed é dato dall'aspettazione di x condizionata a tutte le misure raccolte:

$$\hat{x} = \mathbb{E}[x|y] = x_0 + PC^T \left(CPC^T + R\right)^{-1} (y - y_0) \tag{15.4}$$

dove $y_0 = Cx_0$ denota la media di x.

Ci si chiede come sia legata la stima globale ottima (15.4) alle stime locali $\hat{x}_i = \mathbb{E}[x|y_i]$, cioé quelle ottenibili con le misure effettuate da un singolo sensore. Si vedrá che la stima ottima globale puó scriversi come una *combinazione lineare* delle stime locali. Per provare il risultato é conveniente riscrivere (15.4) come suggerito dal seguente

Lemma 15.1. *La scrittura (15.4) é equivalente alla seguente:*

$$\hat{x} = (P^{-1} + C^T R^{-1} C)^{-1} (P^{-1} x_0 + C^T R^{-1} y) \tag{15.5}$$

***Dimostrazione*:** Applicando il lemma di inversione di matrice (vedi [1, Appendice A]) si ha

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= x_0 + PC^T\left[R^{-1} - R^{-1}C(P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}C^TR^{-1}\right](y-y_0) = \\
&= x_0 + P\left[C^TR^{-1} - C^TR^{-1}C(P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}C^TR^{-1}\right](y-y_0) = \\
&= x_0 + P\left[I - C^TR^{-1}C(P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}\right]C^TR^{-1}(y-y_0) = \\
&= x_0 + P\left[(P^{-1}+C^TR^{-1}C) - C^TR^{-1}C\right](P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}C^TR^{-1}(y-y_0) = \\
&= x_0 + (P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}C^TR^{-1}(y-y_0) = \\
&= (P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}\left[C^TR^{-1}(y-y_0) + (P^{-1}+C^TR^{-1}C)x_0\right]. \qquad (15.6)
\end{aligned}$$

Ricordando che $y_0 = Cx_0$ e semplificando si ricava facilmente la tesi:

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= (P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}\left[(P^{-1}+C^TR^{-1}C)x_0 + C^TR^{-1}y - C^TR^{-1}Cx_0\right] \\
&= (P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}(P^{-1}x_0 + C^TR^{-1}y) \qquad (15.7)
\end{aligned}$$

□

Sfruttando l'ipotesi (15.3) si ha che:

$$C^TR^{-1}y = \left[C_1^T,\dots,C_N^T\right]\begin{pmatrix} R_1^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & R_N^{-1}\end{pmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} C_i^TR_i^{-1}y_i. \qquad (15.8)$$

quindi la (15.5) si può riscrivere come

$$\hat{x} = (P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}(P^{-1}x_0 + \sum_{i=1}^{N} C_i^TR_i^{-1}y_i). \qquad (15.9)$$

Si osservi ora che, particolarizzando (15.5), la stima locale epurata delle medie è

$$\hat{\bar{x}}_i = \mathbb{E}[x - x_0|\, y_i - y_{0i}] = (P^{-1}+C_i^TR_i^{-1}C_i)^{-1}(C_i^TR_i^{-1}y_i). \qquad (15.10)$$

Quindi sostituendo $C_i^TR_i^{-1}y_i = (P^{-1}+C_i^TR_i^{-1}C_i)\hat{\bar{x}}_i$ in (15.9) si ottiene

$$\hat{x} = (P^{-1}+C^TR^{-1}C)^{-1}\left[P^{-1}x_0 + \sum_{i=1}^{N}(P^{-1}+C_i^TR_i^{-1}C_i)\hat{\bar{x}}_i\right], \qquad (15.11)$$

che si vede essere una combinazione lineare delle stime locali e dell'informazione a priori sulla condizione iniziale.

Si noti che la (15.3) è un'ipotesi sufficiente, ma non necessaria per poter decomporre la stima ottima globale nella combinazione lineare delle stime locali.

Bibliografia

[1] Giorgio Picci. *Filtraggio statistico (Wiener, Levinson, Kalman) e applicazioni.* Edizioni Progetto Padova.