

## 3.1 Filtro di Kalman e filtro a guadagno costante

### 3.1.1 Equazioni filtro di Kalman

Riassumendo le lezioni precedenti, le equazioni ricorsive necessarie per implementare il filtro di Kalman sono:

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_k) \quad (3.1)$$

$$P_{k+1} = AP_kA^T + Q - AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T \quad (3.2)$$

$$K_{k+1} = P_{k+1}C^T(CP_{k+1}C^T + R)^{-1} \quad (3.3)$$

$$P_0 = \bar{P}_0, \quad \hat{x}_0 = \bar{x}_0 \quad (3.4)$$

dove con un piccolo abuso di notazione abbiamo utilizzato  $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k+1}$ , cioè la *stima filtrata*, e  $P_{k+1} = P_{k+1|k}$ , cioè la *varianza dell'errore di predizione*<sup>1</sup>.

Poiché per costruzione  $\hat{x}_{k|k} = E[x_k|y_k \dots y_0]$ , lo stimatore così ottenuto è *ottimo* in termini indicati nella Lezione 1.

Per eseguire i calcoli è necessaria la memorizzazione della stima precedente  $\hat{x}_{k|k}$  e della covarianza di errore di predizione  $P_k$  ad ogni passo. Inoltre è necessario invertire ad ogni passo una matrice di ordine  $m$ , cioè della dimensione delle misure.

Il filtro risulta tempo variante a causa dell'aggiornamento della matrice  $K_{k+1}$  ad ogni passo.

### 3.1.2 Equazioni filtro statico

Uno stimatore simile a quello precedentemente definito è lo stimatore *statico*, definito dalla seguente equazione:

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - CA\tilde{x}_{k|k}) \quad (3.5)$$

$$\tilde{x}_{0|0} = \bar{x}_0 \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>Si potrebbero scrivere delle equazioni simili per la stima di predizione  $\hat{x}_{k+1|k}$  e per la varianza d'errore filtrata  $P_{k+1|k+1}$ , ma da un punto di vista pratico le precedenti sono più semplici da analizzare, e comunque è possibile passare da una all'altra tramite le equazioni descritte nella lezione precedente.

nel quale si utilizza un guadagno di aggiornamento costante  $K_k = K$ , che risulta quindi numericamente piu' efficiente in quanto non necessita del calcolo di  $P_{k+1|k}$  estremamente oneroso a causa dell'inversione della matrice al suo interno (vedi Eq. (3.2)).

A differenza del filtro di Kalman, il calcolo della varianza dell'errore di stima non e' necessaria per l'implementazione di questo filtro. Tuttavia, esso e' importante per poter valutare la sua prestazione.

La varianza dell'errore di predizione di commesso dallo stimatore statico e' data da:

$$\tilde{P}_{k+1|k} = E \left[ (x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k}) (x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})^T | y_0 \dots y_k \right] \quad (3.7)$$

che sviluppando i singoli termini porta ad ottenere:

$$\tilde{P}_{k+1|k} = A(I - KC) \tilde{P}_{k|k-1} (I - KC)^T A^T + Q + AKRK^T A^T \quad (3.8)$$

## 3.2 Analisi equazioni dei filtri

Andremo ora ad analizzare il comportamento della varianza dell'errore di predizione del filtro di Kalman e del filtro con guadagno statico. Con abuso di notazione definiamo  $P_{k+1|k} = P_{k+1}$ , e  $\tilde{P}_{k+1|k} = \tilde{P}_{k+1}$ . Richiamando le equazioni derivate in precedenza, la varianza di errore evolve secondo le seguenti equazioni

$$P_{k+1} = AP_k A^T + Q - AP_k C^T (CP_k C^T + R)^{-1} CP_k A^T = \Phi(P_k) \quad (3.9)$$

$$\tilde{P}_{k+1} = A(I - KC) \tilde{P}_k (I - KC)^T A^T + Q + AKRK^T A^T = \mathcal{L}(K, \tilde{P}_k) \quad (3.10)$$

$$P_0 = \tilde{P}_0 \geq 0 \quad (3.11)$$

L'analisi del comportamento dei termini  $P_{k+1}$  e  $\tilde{P}_{k+1}$  ci dá la stima dell'errore commesso nei due casi. Essendo lo stimatore statico non ottimo risulta sempre verificata la disuguaglianza:

$$\tilde{P}_k \geq P_k \quad \forall k \quad (3.12)$$

a pari condizione iniziale.

**Vogliamo analizzare:**

1.  $P_k \rightarrow P_\infty \Rightarrow K_k \rightarrow K_\infty = P_\infty C (C^T P_\infty C + R)^{-1}$  valore stazionario
2. condizioni (necessarie e sufficienti) di convergenza rispetto alle condizioni iniziali  $P_0$
3. unicitá della soluzione  $P_\infty = \Phi(P_\infty)$
4. analisi di convergenza a valore limite, cioe':  $\tilde{P}_k \rightarrow \tilde{P}_\infty$

5. se  $K = K_\infty$ , allora  $\tilde{P}_k \rightarrow P_\infty$  ?

La condizione numero 4, se verificata, porta ad affermare che dopo un tempo sufficientemente lungo si ha prestazioni analoghe per i due stimatori presi in esame (Kalman e statico).

### 3.2.1 Caso scalare

Prima di analizzare il caso multivariabile e' utile studiare in dettaglio il caso scalare in quanto e' possibile risolvere le equazioni in maniera grafica. Consideriamo quindi:

$$A = a \quad Q = q \quad R = r \quad \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

considerando  $C = 1$ , eventualmente riscaldando il problema, e comunque senza perdita di generalità, possiamo calcolare i valori:

$$\tilde{p}_{k+1} = a^2 (1 - k)^2 \tilde{p}_k + r a^2 k^2 + q = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_k) \quad (3.14)$$

e

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 p_k^2}{p_k + r} \\ &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 p_k^2 - a^2 r^2 + a^2 r^2}{a^2 p_k^2 - a^2 r^2 + a^2 r^2} \\ &= a^2 p_k + q - \frac{a^2 (p_k - r)(p_k + r) + a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= a^2 p_k + q - a^2 (p_k - r) - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= q + a^2 r - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} \\ &= \Phi(p_k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Riassumendo i risultati ottenuti:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k+1} &= a^2 (1 - k)^2 \tilde{p}_k + r a^2 k^2 + q = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_k) \\ p_{k+1} &= q + a^2 r - \frac{a^2 r^2}{p_k + r} = \Phi(p_k) \end{aligned} \quad (3.16)$$

si ha, quindi, delle mappe per il calcolo del valore successivo. Graficamente si ottengono gli andamenti riportati in figura 3.1.

La tangenza della curva generata da  $p_{k+1}$  vale  $\frac{d\Phi}{dP} = \frac{a^2 r^2}{(p_k + r)^2}$ , che calcolata in  $p_k = 0$  risulta pari a  $a^2$ .

La  $\tilde{p}_{k+1}$  é una funzione lineare di valore  $q + r a^2 k^2$  in  $\tilde{p}_k = 0$  di pendenza  $\frac{d\mathcal{L}}{d\tilde{P}} = a^2 (1 - k)^2$ .

Tracciando la retta bisettrice del piano  $p_k - p_{k+1}$  si ottiene l'aggiornamento di  $p_{k+1}$  o  $\tilde{p}_{k+1}$  a livello grafico.

Il risultato che si ottiene analizzando  $\Phi$  é che da qualunque punto si parta su  $\Phi(p_k)$  si converge a  $p_\infty$ , cioè il punto in cui  $p_k = p_{k+1}$ , o in altro modo  $p_\infty = \Phi(p_\infty)$  detto *punto fisso di  $\Phi$* , verificando che  $p_k \rightarrow p_\infty \forall p_0 \geq 0$ .

In modo analogo si ottiene la convergenza di  $\mathcal{L}(k, \tilde{p}_k)$  ad un punto  $\tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$  da qualunque punto  $\tilde{p}_0 \geq 0$  si parta, ovvero:

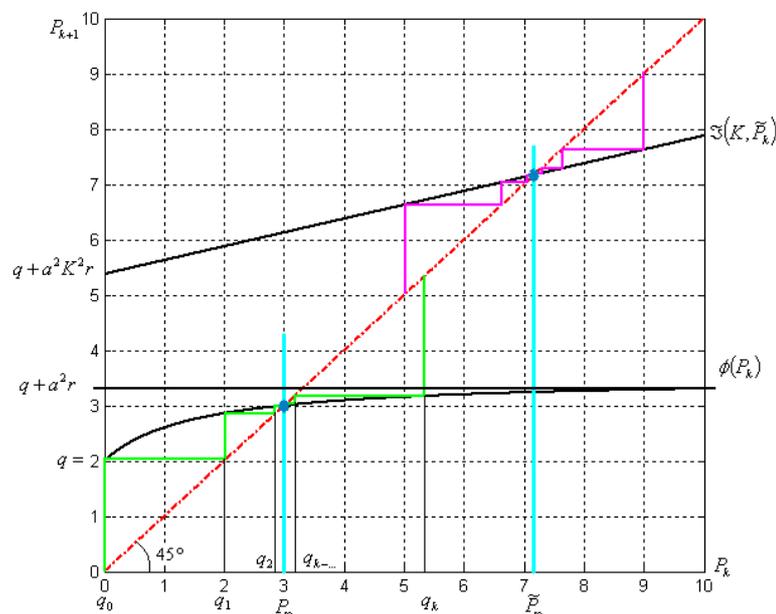


Figura 3.1. Mappa grafica per calcolo dell'aggiornamento di  $P_{k+1}$

$$\tilde{p}_k \rightarrow \tilde{p}_\infty \quad \forall \tilde{p}_0 \geq 0 \quad (3.17)$$

Otteniamo che:

1. L'operatore  $\Phi(\cdot)$  é positivo, monotono crescente  $\frac{d\Phi}{dp} = \frac{a^2 r^2}{(p+r)^2} \geq 0$ , e concavo  $\frac{d^2\Phi}{dp^2} = -\frac{2a^2 r^2}{(p+r)^3} \leq 0$ , ristretto al dominio  $p \geq 0$ .
2. Le successioni  $\{p_k\}_{k=0}^\infty$  sono sempre limitate superiormente, cioe'  $p_k < M_{p_0}$  dove  $M > 0$  dipende dalla condizione iniziale  $p_0$ .
3. Le successioni  $\{\tilde{p}_k\}_{k=0}^\infty$  convergono a  $\tilde{p}_\infty$  se e solo se  $a^2(1-k)^2 < 1$ .
4. Se  $p_k \rightarrow p_\infty < \infty$  e  $\tilde{p}_k \rightarrow \tilde{p}_\infty < \infty$  allora  $p_\infty = \Phi(p_\infty)$  e  $\tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$
5. La convergenza delle successioni e' indipendente da  $r$  (per  $r = 0$  si ha una retta orizzontale, cioe'  $\Phi(p) = q$ ).
6. Le successioni  $\{p_k\}_{k=0}^\infty$  e  $\{\tilde{p}_k\}_{k=0}^\infty$  sono sempre monotone (crescenti o decrescenti in base alla condizione iniziale  $p_0$ ).
7. se  $q > 0$  allora  $p_\infty = \Phi(p_\infty)$  ristretta al dominio  $p \geq 0$ , ha un'unica soluzione.

8. se  $q > 0$  allora  $p_k \rightarrow p_\infty$ , dove  $p_\infty = \Phi(p_\infty)$ . Se  $k_\infty = \frac{p_\infty}{p_\infty + r}$ , allora la successione definita come  $\tilde{p}_{k+1} = \mathcal{L}(k_\infty, \tilde{p}_k)$  converge a  $p_\infty$ , cioè  $\tilde{p}_k \rightarrow p_\infty$ , cioè la retta ottenuta per  $k = k_\infty$  interseca la bisettrice esattamente nello stesso punto di  $\Phi$ , cioè in  $p_\infty$ .
9. per  $q > 0$ , la velocità di convergenza delle successioni è data da  $a^2(1 - k_\infty)^2$ , cioè la tangente di  $\Phi$  nel punto fisso  $p_\infty$ .
10. se  $q > 0$  allora la soluzione  $p_\infty = \Phi(p_\infty)$  ristretta al dominio  $p \geq 0$  è strettamente positiva, cioè  $p_\infty > 0$ .
11. Nel caso particolare in cui  $q = 0$ , si ha che:
  - (a) per  $a^2 > 1$  si ottengono 2 soluzioni:  $p_\infty^1 = 0$  (soluzione instabile) e  $p_\infty^2 > 0$  soluzione stabile. La convergenza alla soluzione stabile è geometrica (esponenziale).
  - (b) per  $a^2 < 1$  si ottiene 1 soluzione  $p_\infty^1 = 0$  stabile. La convergenza alla soluzione stabile è esponenziale  $\sim a^{2k}$ .
  - (c) per  $a^2 = 1$  si ottiene 1 soluzione  $p_\infty^1 = 0$  stabile. La convergenza alla soluzione stabile è del tipo  $\sim 1/k$ .

Quindi la soluzione dell'equazione di Riccati  $p_\infty = \Phi(p_\infty)$  implicitamente risolve anche il problema di trovare il guadagno costante ottimo per lo stimatore statico, se  $q > 0$ . Infatti, sotto opportune condizioni, il guadagno del filtro di Kalman a regime coincide con il guadagno costante che minimizza  $\tilde{p}_\infty$ , cioè

$$k_\infty = \operatorname{argmin}_k \tilde{p}_\infty \\ \text{tale che } \tilde{p}_\infty = \mathcal{L}(k, \tilde{p}_\infty)$$

Inoltre si ottiene,  $\tilde{p}_\infty = p_\infty$ , cioè il filtro con guadagno statico riesce a generare la stessa prestazione del filtro di Kalman a regime.

### 3.2.2 Caso MIMO

Considerando sistemi MIMO (*Multi Input Multi Output*) si possono riassumere le condizioni del caso scalare nel seguente modo:

1. le osservazioni 1, 4 e 5 rimangono valide anche nel caso multivariabile;
2. l'osservazione 2 rimane valida se la coppia  $(A, C)$  è *rilevabile*;
3. l'osservazione 3 è vera se  $A(I - KC)$  è strettamente stabile. Tale  $K$  esiste se e solo se la coppia  $(A, C)$  è *rilevabile*;

4. l'osservazione 6 non é valida nel caso MIMO, infatti in genere  $\Phi(I) \not\leq I$  e  $\Phi(I) \not\geq I$ , dove  $I$  e' la matrice identita', e questo rende un po' piu' laboriosa la dimostrazione di convergenza per ogni condizione iniziale  $P_0 \geq 0$ . Nel caso particolare in cui  $P_0 = 0$ , allora le successioni sono monotone crescenti;
5. le osservazioni 7, 8 e 9 rimangono valide sostituendo la condizione  $(A, Q^{1/2})$  *stabilizzabile* al posto di  $q > 0$ . La velocita' di convergenza e' data dagli autovalori di  $A(I - K_\infty C)$ ;
6. l'osservazione 10 rimane valida sostituendo la condizione  $(A, Q^{1/2})$  *raggiungibile* al posto di  $q > 0$ ;
7. l'osservazione 11 risulta piu' complessa in quanto bisogna sostituire  $q = 0$  con  $(A, Q^{1/2})$  *non raggiungibile* ed andare ad analizzare il comportamento di  $P_\infty$  nel sottospazio non raggiungibile di  $(A, Q^{1/2})$ .