PSC: Progettazione di sistemi di controllo	III Trim. 2007
Lezione 4 — Aprile 26	
Docente: Luca Schenato	*Stesori: L. Schenato*

4.1 Definizioni e proposizioni generali

Si consideri lo spazio delle matrici semidefinite positive $\mathbb{S} = \left\{S \in \mathbb{R}^{n\times n} | S = S^T, S \geq 0\right\}$. Su tale spazio esiste un ordinamento parziale, cioe' un esistono matrici in $S_1, S_2 \in \mathbb{S}$ tali per cui $S_1 \geq S_2$ [1]. L'ordinamento e' detto parziale poiche' $S_1, S_2 \in \mathbb{S}$ non implica che $S_1 \geq S_2$ o $S_2 \geq S_1$. Si considerino per esempio le metrici $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definizione: Una funzione (o operatore o mappa) $\Phi(P) : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ é *monotona crescente* se:

$$P_1 \geq P_2 \Rightarrow \Phi(P_1) \geq \Phi(P_2)$$

□

La condizione per l'applicazione del teorema é che in S sia definito un ordinamento.

Definizione: Un operatore $\mathcal{F}(P) : S \to S$ é *lineare* se:

$$\mathcal{G}(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2) = \alpha_1 \mathcal{G}(P_1) + \alpha_2 \mathcal{G}(P_2)$$

dove α_1, α_2 sono scalari.

□

Definizione: Un operatore $\mathcal{L}(P) : S \to S$ si dice *affine* se $\mathcal{F}(P) = \mathcal{L}(P) - \mathcal{L}(0)$ é lineare.

□

Esempio: $\mathcal{L}(P) = APA^T + Q$ risulta affine in quanto é un operatore lineare a cui é aggiunta una costante. Infatti in questo caso $\mathcal{F}(P) = APA^T$.

Proposizione: Se una successione $\{P_k\}_{k=0}^{+\infty}$ é *monotonica crescente* o *decrescente* si ha che $\lim_{k\to\infty} P_k = P_\infty < \infty$ oppure P_k non é limitata, cioé $\nexists M > 0$ tale che $P_k \leq M$, $\forall k$.

□

[1] Si ricordi che $S_1 \geq S_2$ significa che $S_1 - S_2 \geq 0$.

Proposizione: Sia $\Phi(\cdot)$ monotona crescente, e si consideri la successione definita come $P_{k+1} = \Phi(P_k)$,o equivalentemente $P_k = \Phi^k(P_0) = \underbrace{\Phi \circ \ldots \circ \Phi}_{k}(P_0)$.

Se $P_0 \leq \Phi(P_0) = P_1$ allora $P_{k+1} \geq P_k \ \forall k$, cioe' la successione e' monotona crescente.

Se, invece, vale la condizione $P_0 \geq \Phi(P_0)$ allora $P_{k+1} \leq P_k$ cioe' la successione e' monotona decrescente.

□

Proposizione: Se $\{P_k\}$ e' una successione monotona crescente (decrescente) e limitata superiormente (inferiormente), cioé $\exists M$ tale che $P_k \leq M \ \forall k$ ($\exists M | P_k \geq M$), allora

$$P_k \to P_\infty < \infty$$

□

4.2 Filtro di Kalman e filtro statico a regime

Sia dato il sistema lineare dinamico

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

dove w_k e v_k sono processi i.i.d., tra loro incorrelati, gaussiani a media nulla e varianza rispettivamente Q ed R. Inoltre lo stato iniziale sia

$$x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0) \tag{4.1}$$

Definiamo inoltre, per semplicità di notazione, le seguenti matrici:

$$P_{k+1} := P_{k+1|k} \qquad \tilde{P}_{k+1} := \tilde{P}_{k+1|k}$$

L'equazione a cui soddisfa la varianza dell'errore di stima del *filtro di Kalman* è

$$P_{k+1} = AP_kA^T + Q - AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T = \Phi(P_k) \tag{4.2}$$

mentre quella relativa a un *filtro statico* con guadagno costante K risulta

$$\tilde{P}_{k+1} = A(I - KC)\tilde{P}_k(I - KC)^TA^T + Q + AKRK^TA^T = \mathcal{L}(K, \tilde{P}_k) \tag{4.3}$$

4.2.1 Passi di analisi successivi da compiere

Nelle prossime lezioni andremo a dare dimostrazione delle seguenti condizioni:

1. $\mathcal{L}(K, P)$ e $\Phi(P)$ sono monotone crescenti $\forall K$;

2. $\Phi(P) \leq \mathcal{L}(K,P)\ \forall P, \forall K$, cioé non posso fare meglio del filtro di Kalman con un filtro stazionario;

3. $\Phi(P) = \mathcal{L}(K_P, P)$ se $K_P = PC^T\left(CPC^T + R\right)^{-1}$, cioe' $\Phi(P) = \min_K \mathcal{L}(K,P)$ e $K_P = \text{argmin}_K \mathcal{L}(K,P)$;

4. se (A,C) rivelabile $\Rightarrow P_k = \Phi^k(P_0)$, P_k limitato superiormente $\Rightarrow P_k \to P_\infty < \infty$;

5. se (A,C) e' rivelabile e $\left(A, Q^{1/2}\right)$ é raggiungibile $\Rightarrow \exists! P_\infty \geq 0 : P_\infty = \Phi(P_\infty)$, $P_\infty > 0$, $P_k \to P_\infty\ \forall P_0 \geq 0$;

6. se (A,C) e' rivelabile e $\left(A, Q^{1/2}\right)$ é stabilizzabile $\tilde{P}_{k+1} = \mathcal{L}\left(K_\infty, \tilde{P}_k\right) \Rightarrow \tilde{P}_{k+1} \to P_\infty$, dove $P_\infty = \Phi(P_\infty)$ e $K_\infty = P_\infty C^T\left(CP_\infty C^T + R\right)^{-1}$.

Si hanno allora le seguenti proposizioni.

Proposizione 4.1. *L'operatore $\mathcal{L}(K,P)$ è monotono crescente.*

***Dimostrazione*:** Prese due matrici P_1 e P_2 tali che $P_1 \geq P_2$, allora risulta che

$$\mathcal{L}(K,P_1) - \mathcal{L}(K,P_2) = A(I-KC)(P_1-P_2)(I-KC)^T A^T \geq 0$$

poiché per ipotesi $P_1 - P_2 \geq 0$. □

Proposizione 4.2. *Date le matrici K e P semidefinite positive, vale la seguente disuguaglianza*

$$\mathcal{L}(K,P) \geq \Phi(P)$$

dove l'uguaglianza vale solo per $K = K_P = PC^T(CPC^T + R)^{-1}$. In maniera equivalente possiamo scrivere

$$\Phi(P) = \min_K \mathcal{L}(K,P), \quad K_P = \text{argmin}_K \mathcal{L}(K,P)$$

***Dimostrazione*:** Si verifica facilmente per sostituzione che

$$\mathcal{L}(K,P) = \Phi(P) + A(K-K_P)(CPC^T+R)(K-K_P)^T A^T$$

e dal fatto che il secondo termine e' sempre semidefinito positivo, segue la tesi. □

Proposizione 4.3. *Data la matrice $P \geq 0$, l'operatore $\Phi(P)$ è monotono crescente.*

***Dimostrazione*:** Prese due matrici semidefinite positive P_1 e P_2 tali che $P_1 \geq P_2$, si ha che

$$\Phi(P_1) = \mathcal{L}(K_{P_1}, P_1) \geq \mathcal{L}(K_{P_1}, P_2) \geq \mathcal{L}(K_{P_2}, P_2) = \Phi(P_2)$$

dove la prima disuguaglianza deriva dalla monotonicita' di $\mathcal{L}$, mentre la seconda dal fatto che $\Phi(P) = \min_K \mathcal{L}(K,P)$. □

Proposizione 4.4. *Sia $P_0 = \tilde{P}_0 = 0$. Allora le successioni $\{P_k\}_{k\geq 0}$ e $\{\tilde{P}_k\}_{k\geq 0}$ sono monotone crescenti, quindi ammettono limite. Inoltre si ha che $P_k \leq \tilde{P}_k, \forall k \geq 0$, $\forall K$ e $\forall \tilde{P}_0 = P_0 \geq 0$.*

***Dimostrazione*:** Dalle ipotesi risulta

$$P_1 = \Phi(P_0) = \Phi(0) = Q \geq 0 = P_0$$

Essendo $P_{k+1} = \Phi(P_k)$ e procedendo per induzione, dalla monotonicità dell'operatore Φ segue subito che

$$P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \ldots \leq P_k.$$

In modo analogo si dimostra il risultato per la successione $\{\tilde{P}_k\}_{k\geq 0}$ considerato che

$$\tilde{P}_1 = \mathcal{L}(K, \tilde{P}_0) = Q + AKRK^TA^T \geq 0 = \tilde{P}_0.$$

Per ipotesi $P_0 \leq \tilde{P}_0$, per cui per la Proposizione 4.2 si ha che

$$P_1 = \Phi(P_0) \leq \mathcal{L}(K, \tilde{P}_0) = \tilde{P}_1.$$

Per induzione segue la tesi. □

Proposizione 4.5. *Se la coppia (A, C) è rivelabile, allora esiste K tale che $A_c = A(I - KC)$ e' strettamente stabile.*

***Dimostrazione*:** Se A non ha autovalori nulli, la dimostrazione e' semplice. Infatti in questo caso la matrice A e' invertibile e dato che (A, C) e' rivelabile, allora esiste $\bar{K}$ tale che $A - \bar{K}C$ e' strettamente stabile. Se scegliamo $K = A^{-1}\bar{K}$ abbiamo che $A_c = A(I - KC) = A - AKC = A - \bar{K}C$ e quindi A_c e' strettamente stabile.

Se A possiede autovalori nulli allora senza perdita di generalita', tramite un opportuno cambio di base, e' possibile riscrivere $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ e $C = [C_1 \;\; C_2]$, dove A_{11} include solamente i blocchi di Jordan con autovalori non nulli di A, mentre A_{22} solo quelli con autovalori nulli. Di conseguenza A_{11} e' invertibile. Inoltre e' ovvio dalla struttura delle matrici A e C che anche la coppia (A_{11}, C_1) deve essere rivelabile, per esempio utilizzando il test PBH, quindi esiste un $\bar{K}$ tale che $A_{11} - \bar{K}C_1$ e' strettamente stabile. Se ora scegliamo $K = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\bar{K} \\ 0 \end{bmatrix}$ otteniamo $A_c = A - AKC = \begin{bmatrix} A_{11} - \bar{K}C_1 & -\bar{K}C_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$. Quindi poiche' la matrice A_c e' triangolare superiore, tutti gli autovalori sono in modulo strettamente minori di uno, cioe' $|\lambda_i(A_c)| < 1$ in quanto $A_{11} - \bar{K}C_1$ e' strettamente stabile per costruzione, e A_{22} ha autovalori nulli. □

Proposizione 4.6. *Si consideri l'operatore lineare $\mathcal{F}(P) = A_cPA_c^T$ dove $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tale operatore e' strettamente stabile se e solo se A_c e' strettamente stabile.*

***Dimostrazione*:** La dimostrazione e' molto semplice se A_c ha esiste una base completa $(v_1, \ldots, v_n)$ di autovettori di A_c corrispondenti agli autovalori $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$[2]. Poiche' $\mathcal{F}(P)$ e' un'operatore lineare, la sua stabilita' e' data degli autovalori. Vogliamo ora trovare in maniera esplicita autovalori e autovettori di $\mathcal{F}(P)$. Ovviamente gli autovettori di $\mathcal{F}(P)$ sono matrici $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Consideriamo la matrice $V_{ij} = v_i v_j^*$, dove v_i sono autovettori di A_c e il simbolo $*$ indica il trasposto coniugato. Si ha quindi

$$\mathcal{F}(V_{ij}) = A_c v_i v_j^* A_c^T = A_c v_i v_j^* A_c^* = (A_c v_i)(A_c v_j)^* = \lambda_i v_i (\lambda_j v_j)^* = \lambda_i \lambda_j^* v_i v_j^* = \mu_{ij} V_{ij}$$

dove $\mu_{ij} = \lambda_i \lambda_j^*$. Quindi la matrice V_{ij} cosi' costruita e' un autovettore di $\mathcal{F}(P)$ corrispondente all'autovalore μ_{ij}. Poiche' $(v_1, \ldots, v_n)$ formano una base completa di $\mathbb{R}^n$, allora abbiamo appena mostrato che esistono n^2 autovettori distinti di $\mathcal{F}(P)$, e quindi $(V_{11}, V_{12}, \ldots, V_{nn})$ formano una base completa dello spazio $\mathbb{R}^{n\times n}$. Inoltre $|\mu_{ij}| = |\lambda_i||\lambda_j| < 1$ poiche' per ipotesi A_c e' strettamente satbile e quindi ogni $|\lambda_i| < 1$.

Nel caso in cui gli autovetori A_c non formino una base completa di $\mathbb{R}^n$, la dimostrazione risulta un po' piu' laboriosa, ma l'enunciato della proposizione rimane valido. □

Proposizione 4.7. *Se la coppia (A, C) è rivelabile, allora la successione $\{P_k\}_{k\geq 0}$ e' limitata superiormente per ogni $P_0 \geq 0$.*

***Dimostrazione*:** Dalla Proposizione 4.4 segue che basta verificare che esistono due matrici K ed M di dimensioni opportune tali che

$$\tilde{P}_k \leq M < \infty, \ \forall k \geq 0, \forall \tilde{P}_0 = P_0 \geq 0.$$

poiche' $P_k \leq \tilde{P}_k$. Poiche' (A, C) e' rivelabile esiste K tale che $A_c := A(I - KC)$ e' strettamente stabile. Per la Proposizione 4.6 si ha che anche l'operatore $\mathcal{F}(P) = A_c P A_c^T$ e' strettamente stabile. Una proprieta' degli operatori lineari e' che

$$\mathcal{F}^k(P) = A_c^k P (A_c^T)^k = \sum_{i=1}^{n^2} V_i k^{m_i} \mu_i^k$$

dove V_i sono matrici[3] che dipendono dalla condizione iniziale P, μ_i sono gli autovalori di $\mathcal{F}(P)$, e m_i e' un intero che dipende dalle dimensioni dei blocchi di Jordan corrispondente all'autovalore μ_i[4]. Poiche' $\mathcal{F}(P)$ e' strettamente stabile allora $|\mu_i| < 1$. Prendendo una qualsiasi norma[5] definita su $\mathbb{R}^{n\times n}$, possiamo quindi affermare che esistono due scalari positivi $a_P > 0$ possibilmente funzione di P e $0 \leq \bar{\mu} < 1$ tali che

$$||A_c^k P (A_c^T)^k|| \leq a_P \bar{\mu}^k$$

[2]per esempio nel caso di autovalori tutti distinti.

[3]Si noti che ci sono n^2 termini nella sommatoria che corrispondono alla dimensione dello spazio lineare su cui vive l'operatore $\mathcal{F}(P)$.

[4]Per convincersi e' sufficiente pensare di riscrivere A_c in forma di Jordan e notare che ogni elemento della matrice $\mathcal{F}^k(P)$ e' una combinazione lineare di prodotti degli elementi di A_c^k e P.

[5]Per esempio, la norma di Frobenius $||A||_F = \sum_{i,j} A_{ij}^2$, oppure una qualsiasi norma indotta, come la norma-2 $||A||_2 = \max_x \frac{||Ax||_2}{||x||_2}$

Si consideri ora l'operatore $\mathcal{L}(K,P)$ e si noti che puo' essere scritto come:

$$\mathcal{L}(K,P) = A_c P A_c^T + S$$

dove $S = Q + AKRK^TA^T \geq 0$. Possiamo quindi scrivere ogni elemento della successione $\tilde{P}_k$ come

$$\tilde{P}_k = \mathcal{L}^k(K,\widetilde{P}_0) = A_c^k \widetilde{P}_0 (A_c^T)^k + \sum_{h=0}^{k-1} A_c^h S (A_c^T)^h = \sum_{i=1}^{n^2} V_i k^{m_i} \mu_i^k + \sum_{h=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{n^2} W_i h^{m_i} \mu_i^h$$

dove V_i dipendono da $\tilde{P}_0$ e W_i da S. Poiche' la successione e' la somma di termini che decrescono geometricamente a zero abbiamo che

$$||\widetilde{P}_k|| \leq a_{\tilde{P}_0}\bar{\mu}^k + a_S \sum_{h=1}^{k-1} \bar{\mu}^h \leq a_{\tilde{P}_0} + a_S \frac{1}{1-\bar{\mu}}$$

Quindi la serie e' limitata superiormente, e quindi converge cioe' $\tilde{P}_k \to \tilde{P}_\infty$. Se $||\widetilde{P}_k|| \geq ||P_k||$ allora anche la successione P_k e' limitata superiormente, concludendo la dimostrazione. □

Si noti come dalla dimostrazione si ricavi che $\widetilde{P}_k$ converge per ogni condizione iniziale $\widetilde{P}_0$ in quanto risulta essere il risultato di una serie convergente. Cio' pero' non implica che anche P_k converga, ma semplicemente che e' limitata superiormente.

Tutti i precedenti risultati possono essere riassunti nel seguente importante teorema:

Teorema 4.1. *Se la coppia (A,C) e' rivelabile e $(A,Q^{1/2})$ è raggiungibile, allora esiste, è unica e strettamente positiva la matrice $P_\infty > 0$ tale che $P_k \to P_\infty$, $\forall P_0 \geq 0$. Si ha inoltre che $\Phi(P_\infty) = P_\infty$ e $\tilde{P}_{k+1} = \mathcal{L}(K_\infty, \tilde{P}_k) \to P_\infty$, con $K_\infty = P_\infty C^T(CP_\infty C^T + R)^{-1}$.*

***Dimostrazione*:** Dalla proposizione precedente sappiamo che ogni successione P_k e' limitata superiormente se (A,C) e' rivelabile. Se consideriamo come condizione iniziale $P_0 = 0$, allora tale successione e' monotona crescente. Essendo limitata superiormente, allora abbiamo che $P_k \to P_\infty \geq 0$.

E' necessario ora dimostrare che la soluzione P_∞ e' strettamente positiva. Tale dimostrazione e' un po' tediosa e si rimanda alla Proposizione 10.5 in del libro del Prof. Picci.

La dimostrazione di unicita' si ottiene mostrando che $P_k \to P_\infty$ per ogni $P_0 \geq 0$. Abbiamo dimostrato che cio' e' vero per $P_0 = 0$. Cio' rimane vero anche per $0 \leq P_0 \leq P_\infty$. Infatti la sequenza con condizione iniziale $P_0 = 0$ converge a P_∞ e la sequenza con $P_0 = P_\infty$ e' identicamente uguale a P_∞. Poiche' la sequenza con condizione iniziale $0 \leq P_0 \leq P_\infty$ e' limitata inferiormente da queste due, per il teorema dei due carabinieri anche questa converge a P_0. Prendiamo ora $P_0 = \widetilde{P}_0 = P_\infty + D$, dove $D \geq 0$. Consideriamo la sequenza $\tilde{P}_{k+1} = \mathcal{L}(K_\infty, \widetilde{P}_k)$ inizializzata al precedente valore iniziale. Si noti inoltre che $\mathcal{L}(K_\infty, P_\infty) = P_\infty$ ed usare questa proprieta' per notare che $\tilde{P}_k = P_\infty + (A_c)^k D (A_c^T)^k$ dove l'ultimo termine converge a zero poiche A_c e' strettamente stabile. Quindi $\tilde{P}_k \to P_\infty$. Poiche' $P_\infty \leq P_k \leq \tilde{P}_k$, allora per il teorema dei due carabinieri anche $P_k \to P_\infty$. A questo punto prendiamo una qualsiasi condizione iniziale $P_0 \geq 0$ e consideriamo tre successioni con condizioni iniziali 0, P_0 e $P_0 + P_\infty$. Poiche' sia la prima che l'ultima convergono a P_∞ e la seconda e' limitata dalle due, allora sempre per il teorema dei due carabinieri anche la seconda converge a P_∞, il che dimostra la convergenza per ogni condizione iniziale.

Rimane ora la dimostrazione di unicita'. Questa e' semplice poiche' abbiamo appena dimostrato che ogni successione converge a P_∞, quindi se per assurdo ci fosse un'altra matrice semidefinita positiva tale che $\bar{P} = \Phi(\bar{P})$, allora per la dimostrazione precedente la successione con condizione iniziale $P_0 = \bar{P}$ convergerebbe a P_∞ e quindi $\bar{P}$ non potrebbe essere un punto fisso di Φ. □

Teorema 4.2. *Se la coppia (A, C) e' rivelabile e $(A, Q^{1/2})$ è stabilizzabile, allora esiste ed è unica la matrice $P_\infty \geq 0$ tale che $P_k \to P_\infty$, $\forall P_0 \geq 0$. Si ha inoltre che $\Phi(P_\infty) = P_\infty$ e $\tilde{P}_{k+1} = \mathcal{L}(K_\infty, \tilde{P}_k) \to P_\infty$, con $K_\infty = P_\infty C^T (C P_\infty C^T + R)^{-1}$.*

***Dimostrazione*:** La dimostrazione puo' essere ottenuta utilizzando il precedente teorema. Senza perdita di generalita' possiamo riscrivere tramite un opportuno cambio di base, le matrici A, Q ed C come

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove $(A_{11}, Q_{11}^{1/2})$ e' raggiungibile, (A_{11}, C_1) e' rivelabile, e A_{22} e' strettamente stabile. Poiche' (A_{11}, C_1) e' rivelabile, esiste un opportuno $K = \begin{bmatrix} K_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ tale che $A_c = A(I - KC)$ sia strettamente stabile e quindi

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11}^c & A_{12}^c \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

dove A_{11}^c e A_{22} sono strettamente strettamente stabili. A questo punto si vede chiaramente che la particolare struttura triangolare delle matrici implica che l'evoluzione del blocco $\tilde{P}_{22}$ non dipende da $\tilde{P}_{12}$ e $\tilde{P}_{11}$, che infatti puo' essere scritta come

$$\tilde{P}_{22}(k+1) = A_{22} \tilde{P}_{22}(k) A_{22}^T$$

Poiche' A_{22} e' strettamente stabile allora $\tilde{P}_{22}(k) \to 0$. Inoltre, affinche' $\tilde{P}_k$ rimanga semidefinita positiva si deve avere che anche $\tilde{P}_{12}(k) \to 0$. Quindi per ogni condizione iniziale $\tilde{P}_0 \geq 0$ si ha

$$\tilde{P}_k \to \tilde{P}_\infty = \begin{bmatrix} P_{11}^\infty & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiche' $0 \leq P_\infty \leq \tilde{P}_\infty$, anche il punto fisso di Φ deve avere la stessa struttura con i blocchi inferiori tutti nulli. A questo punto, si vede facilmente che P_{11}^∞ si ottiene analizzando il problema ristretto alle matrici (A_{11}, C_1, Q_{11}, R), cioe' il sistema trascurando la parte non raggiungibile di A. A questo punto poiche (A_{11}, C_1) e' ancora rivelabile e $(A_{11}, Q_{11}^{1/2})$ e' raggiungibile, possiamo usare il precedente teorema per ottenere tutte le condizioni di unicita', esistenza, e convergenza a P_{11}^{∞} e quindi di P_{∞}.

Riassumendo, possiamo affermare che P_{∞} non e' strettamente positiva e che il suo nucleo e' dato dalla parte non raggiungibile di $(A, Q^{1/2})$.

$\square$