PSC: Progettazione di sistemi di controllo	**III Trim. 2007**
Lezione 5 — 2 Maggio 2007	
Docente: Luca Schenato	*Stesori: L. Schenato*

5.1 Stimatore ottimo con perdita di pacchetti

Si consideri ora il seguente contesto: le misure y_k ottenute dal sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

vengono trasmesse attraverso una rete di comunicazione digitale, con la possibile perdita di alcuni pacchetti di dati. Si vuole ricavare l'espressione di uno stimatore sotto queste ipotesi, cioe'

$$\hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}[x_k \mid \underbrace{y_{k-1}, y_{k-3}, y_{k-6} \ldots, y_4, y_2, y_1}_{\text{misure arrivate allo stimatore}}] \tag{5.1}$$

Lo schema a cui si fa riferimento è rappresentato nella Figura 5.1. Sono possibili diversi

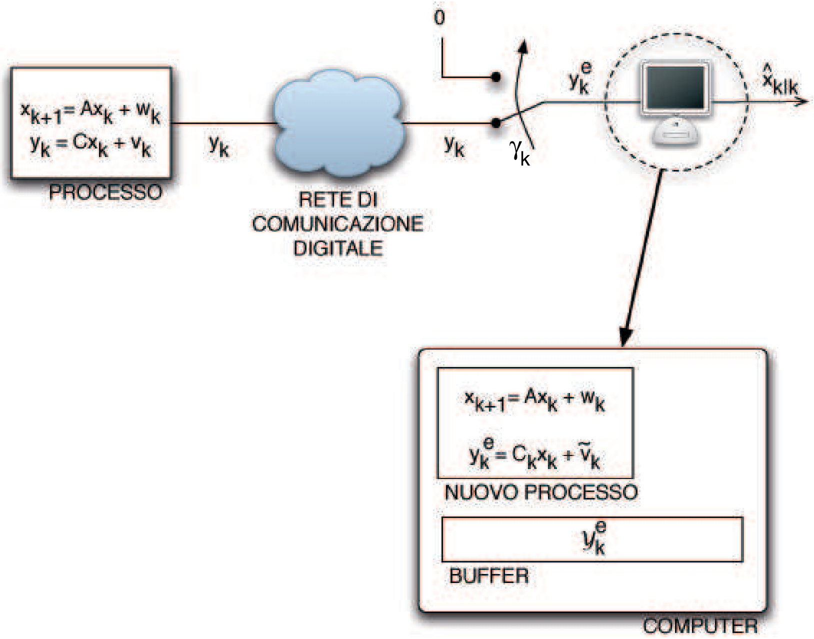

Figura 5.1. Schema generale di trasmissione delle misure attraverso una rete di comunicazione.

approcci nell'affrontare la perdita di un pacchetto. In particolare, vogliamo riscrivere il problema definito dall' Equazione (5.1) in modo tale che sia equivalente ad un problema di stima classico come il filtro di Kalman tempo variante.

Si analizzerà, in particolare, il caso in cui nel buffer dello stimatore viene memorizzato

$$y_k^s = \begin{cases} y_k & \text{se il dato è arrivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il fatto di memorizzare uno zero nel caso di perdita di pacchetto e' assolutamente arbitrario. Infatti qualsiasi altro valore potrebbe essere memorizzato, come per esempio $y_k^s = 5$ oppure $y_k^s = \tilde{v}_k$ dove v_k e' un numero casuale, tuttavia le equazioni del filtro ottimo riportate in seguito non subiscono cambiamenti.

A tal fine si definisce la variabile binaria γ_k come

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{se il dato è arrivato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si può scrivere

$$y_k^s = \gamma_k y_k = \gamma_k C x_k + \gamma_k v_k = C_k x_k + \tilde{v}_k$$

con $C_k = \gamma_k C$ e $\tilde{v}_k = \gamma_k v_k \sim \mathcal{N}(0, \gamma_k R)$[1]. A questo punto il processo di misura visto dallo stimatore puo' essere riscritto nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A x_k + w_k \\ y_k^s = C_k x_k + \tilde{v}_k \end{cases}$$

Si tratta di un sistema lineare tempo variante, per il quale è possibile scrivere le equazioni del filtro di Kalman, sostituendo le matrici $C \leftarrow C_k = \gamma_k C$ e $R \leftarrow R_k = \gamma_k R$. Risulta chiaro che il filtro ottimo per questo nuovo processo di misura dato da:

$$\hat{x}_k = E[x_k | y_k^s, y_{k-1}^s, \dots, y_1^s, y_0^s, \gamma_k, \gamma_{k-1}, \dots, \gamma_1, \gamma_0] \tag{5.2}$$

E' chiaro che questo nuovo stimatore di Equazione (5.2) e' esattamente *equivalente* a quello di Equazione (5.1), in quanto l'informazione su cui sono condizionati e' la stessa, cioe' da uno modello posso ricavare l'altro e viceversa.

[1] La distribuzione di probabilita' del rumore $\tilde{v}_k$ collassa ad una distribuzione(impulso) di Dirac nel caso in cui $\gamma_k R = 0$. Si noti inoltre come C_k e $\gamma_k R$ siano variabili aleatorie se γ_k e' una variabile aleatoria. In questo caso la distribuzione di $\tilde{v}_k$ dovrebbe essere piu' formalmente scritta come $p(\tilde{v}_k|\gamma_k) = \mathcal{N}(0, \gamma_k R)$. Si noti quindi che $\tilde{v}_k$ non e' una variabile aleatoria gaussiana, infatti la sua distribuzione e' data $p(\tilde{v}_k) = p(\tilde{v}_k|\gamma_k = 1)\mathbb{P}[\gamma_k = 1] + p(\tilde{v}_k|\gamma_k = 0)\mathbb{P}[\gamma_k = 0] = \mathbb{P}[\gamma_k = 1]\mathcal{N}(0, R) + (1 - \mathbb{P}[\gamma_k = 1])\mathcal{N}(0, 0)$. Tuttavia lo diventa se condizionata rispetto a γ_k.

A questo punto, utilizzando le equazioni del filtro di Kalman tempo variante trovate nella Lezione 2 otteniamo:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k+1} &:= E[x_{k+1}|y^s_{k+1},\dots,y^s_0,\gamma_{k+1},\dots,\gamma_0] \\ &= A\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}(y^s_{k+1} - C_k A\hat{x}_{k|k}) \\ &= A\hat{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k})\end{aligned} \tag{5.3}$$

dove $K_{k+1} = P_{k+1|k}C^T(CP_{k+1|k}C^T + R)^{-1}$.

$$\begin{aligned}P_{k+1|k} = P_{k+1} &= AP_kA^T + Q - AP_kC_k^T(C_kP_kC_k^T + R_k)^{-1}C_kP_kA^T \\ &= AP_kA^T + Q - \gamma_k AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T \\ &= \Phi_{\gamma_k}(P_k)\end{aligned} \tag{5.4}$$

Le equazioni sono state ottenute sostituendo le matrici $C_k = \gamma_k C$ e $R_k = \gamma_k R$ e ricordando che la pseudoinversa di una matrice nulla e' la matrice nulla.

E' chiaro che se il pacchetto non arriva a destinazione viene a mancare il termine correttivo prodotto dallo stimatore e la varianza dell'errore cresce; se invece il pacchetto arriva viene sottratto un termine e la varianza diminuisce. Il nuovo operatore Φ_{γ_k}, che dipende da P_k, per $\gamma_k = 1$ coincide esattamente con il filtro di Kalman, mentre per per $\gamma_k = 0$ è paragonabile a ciò che succede in catena aperta. Quando si utilizza lo stimatore ottimo con perdita di pacchetti (Fig. 5.2) in base all'arrivo a meno del pacchetto si alterna un operatore stabile (Φ_1) ad un operatore (Φ_0) per il calcolo della varianza di errore che non necessariamente converge (si pensi al caso in cui la matrice A è instabile).

E' importante osservare che $P_k = P_k(\gamma_0,\dots,\gamma_k)$; P_k è quindi una variabile stocastica, che dipende dalla particolare realizzazione, e per la quale non ha senso parlare di convergenza nel senso attribuitele precedentemente. Tuttavia è necessario osservare che per calcolare P_k non e' necessario conoscere la statistica del processo $\{\gamma_k\}$, ma solo la sua particolare realizzazione.

Poiche' la covarianza di errore e' una variabile stocastica, e' necessario definire un criterio in base al quale valutare le prestazioni di questo stimatore, siamo interessati a valutarne la distribuzione di probabilita', cioe' $p(P_k+1)$. Se la distribuzione di probabilita' delle sequenze $p(\gamma_k,\dots,\gamma_0)$ fosse nota, potremmo in linea di principio calcolare $p(P_{k+1})$ come

$$\begin{aligned}p(P_{k+1}) &= \int_{\gamma_k}\cdot\cdot\int_{\gamma_0} p(P_{k+1},\gamma_k,\dots,\gamma_0)d\gamma_k\cdot\cdot d\gamma_0 \\ &= \int_{\gamma_k}\cdot\cdot\int_{\gamma_0} p(P_{k+1}\,|\,\gamma_k,\dots,\gamma_0)p(\gamma_k,\dots,\gamma_0)d\gamma_k\cdot\cdot d\gamma_k \\ &= \mathbb{E}_{\{\gamma_k,..,\gamma_0\}}[p(P_{k+1}\,|\,\gamma_k,\dots,\gamma_0)]\end{aligned}$$

Tuttavia tale calcolo risulta numericamente troppo complesso anche nel caso in cui si scelgano distribuzioni di probabilita' sulla successione $\{\gamma_k\}$ molto semplici come distribuzioni

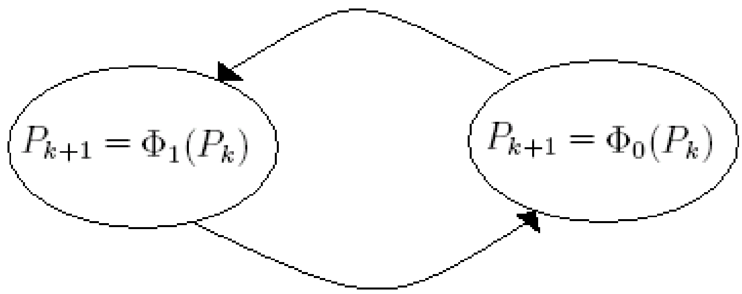

Figura 5.2.

bernulliane i.i.d., cioe' $\mathbb{P}[\gamma_k = 1] = \lambda$. Non e' chiaro neppure se in termini di distribuzioni di probabilita' ci sia una qualche tipo di convergenza, cioe' se $p(P_k) \to p_\infty(P)$. Si cerchera' quindi di calcolare alcune quantita' di particolare interesse per quantificare la prestazione del filtro ottimo soggetto a perdita di pacchetti. Due possibili metriche sono

$$\overline{P}_k = \mathbb{E}_{\{\gamma_{k-1},..,\gamma_0\}}[P_k] \tag{5.5}$$
$$\mathbb{P}[P_k < M], \ \forall k \tag{5.6}$$

dove la prima indica la varianza di errore medio rispetto a tutte le possibili sequenze $\{\gamma_k\}$, mentre la seconda indica la probabilita' della varianza di errore di non superare una determinato limite superiore $M > 0$ rispetto a tutte le possibili sequenze $\{\gamma_k\}$. La prima metrica da una valore medio della prestazione, mentre la seconda e' importante in applicazioni nelle quali si vuole essere certi che l'errore massimo sia inferiore ad una certa soglia. Anche in questo caso il calcolo esplicito delle due quantita' indicate sopra risulta numericamente complesso, in particolare la seconda metrica. Nel primo caso questo e' facilmente osservabile andando a calcolare esplicitamente l'aspettazione della varianza di errore $\mathbb{E}_\gamma[P_k]$, dove per semplicita' indichiamo semplicemente che l'aspettazione e' fatta rispetto al processo di arrivo $\{\gamma_k\}$.

Si consideri per esempio il caso in cui il processo $\{\gamma_k\}$ sia un processo di Bernoulli, cioè $\gamma_k \sim \mathcal{B}(\lambda)$. Quindi le variabili γ_k sono i.i.d., con $\mathbb{P}\left[\gamma_k = 1\right] = \lambda \in [0, 1]$. In base all'espressione di $P_{k+1|k}$ in 5.4 si calcola

$$\bar{P}_{k+1} := \mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1}\right] = A\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]A^T + Q - \mathbb{E}_\gamma\left[\gamma_k g(P_k)\right] \tag{5.7}$$

con $g(P_k) = AP_kC^T(CP_kC^T + R)^{-1}CP_kA^T$. Poichè $\{\gamma_k\}$ è indipendente da P_k e quindi da $g(P_k)$ l'aspettazione del prodotto è pari al prodotto delle aspettazioni. Si ha perciò:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{k+1} &= A\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]A^T + Q - \mathbb{E}_\gamma\left[\gamma_k\right]\mathbb{E}_\gamma\left[g(P_k)\right] \\ &= A\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]A^T + Q - \lambda\mathbb{E}_\gamma\left[g(P_k)\right] \\ &\neq A\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]A^T + Q - \lambda g(\mathbb{E}_\gamma\left[P_k\right]) = A\bar{P}_kA^T + Q - \lambda g(\bar{P}_k) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Come si vede dalle equazioni non è possibile ricavare una formula iterativa per $\bar{P}_{k+1}$ come nel caso del filtro di Kalman senza perdita di pacchetti perchè $g(P_k)$ è una funzione non lineare di P_k, quindi in genere $\mathbb{E}_\gamma[g(P_k)] \neq g\left(\mathbb{E}_\gamma[P_k]\right)$.

Sebbene non sia possibile calcolare in maniera esplicita $\mathbb{E}_\gamma[P_k]$, si vuole almeno determinare quando lo stimatore è stabile e nel caso che lo sia ottenere almeno delle approssimazioni superiori ed inferiori di stabilita'.

Il concetto di stabilità può essere definito in vari modi. Tipicamente si considera uno stimatore stabile se la varianza d'errore è sempre inferiore ad un valore fissato ($P_k < M, \forall k$); in alternativa si può considerare come indice di prestazione la media di P_k rispetto al processo $\{\gamma_k\}$, o ancora la quantità $\mathbb{E}_\gamma\left[\|x_k - \hat{x}_k\|^2\right]$, che indica quanto si discosta, in media, la stima dal valore reale. La scelta di uno di questi indici dipende dalla particolare applicazione considerata. Nel caso in esame si farà riferimento alla seguente

Definizione 5.1. *Dato un processo $\{\gamma_k\}$ si dice che lo stimatore è stabile in media quadratica se $\mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1|k}\right] < M < \infty$.*

Bisogna quindi verificare se e sotto quali ipotesi risulta limitata $\bar{P}_{k+1} := \mathbb{E}_\gamma\left[P_{k+1|k}\right]$. Come abbiamo visto in precedenza non è possibile ricavare $\bar{P}_{k+1}$ in maniera esplicita, tuttavia e' possibile calcolare un'approssimazione superiore cercando un filtro sub-ottimo di cui sappiamo calcolare l'aspettazione della varianza di errore in maniera esplicita.

A tale scopo considereremo il seguente filtro:

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + \gamma_{k+1}K(y^s_{k+1} - C_kA\tilde{x}_{k|k}) \tag{5.9}$$

che assomiglia molto al filtro ottimo di Equazione (5.3) nel senso che l'aggiornamento avviene solamente se la misura arriva allo stimatore, altrimenti la stima viene effettuata usando solo il modello di predizione. A differenza del filtro ottimo tempo variante, il guadagno di questo filtro e' costante e quindi molto piu' efficiente da un punto di vista numerico ed implementativo[2]. Questo filtro ha covarianza d'errore definita come

$$\tilde{P}_{k+1|k} := \tilde{P}_{k+1} = \mathbb{E}\left[(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})(x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k})^T | y^s_k, \ldots, y^s_0, \gamma_k, \ldots, \gamma_0\right].$$

Anche $\tilde{P}_k$ risulta funzione dei vari γ_k, cioé $\tilde{P}_k = \tilde{P}_k(\gamma_{k-1}, \ldots, \gamma_0)$. Si tratta, perciò, di una variabile stocastica tempo variante. Il nuovo stimatore non è ottimo per cui vale la relazione

$$P_{k+1} \leq \tilde{P}_{k+1} \tag{5.10}$$

[2]In realta', anche il guadagno di questo e' tempo variante e del tipo $K_{k+1} = \gamma_{k+1}K$, in quanto dipende da γ_k in maniera esplicita, tuttavia lo indicheremo come costante in quanto la componente K e' costante nel tempo

e la stessa relazione vale anche se si considera l'aspettazione rispetto al processo $\{\gamma_k\}$. Si ha cioé

$$\mathbb{E}_\gamma \left[P_{k+1}\right] \leq \mathbb{E}_\gamma \left[\tilde{P}_{k+1}\right] \tag{5.11}$$

Se si riesce a calcolare in maniera esplicita $\mathbb{E}_\gamma \left[\tilde{P}_{k+1}\right] := \check{P}_{k+1}$, e si dimostra che $\check{P}_{k+1}$ è limitata ($\check{P}_{k+1} < M$) allora si può affermare che lo stimatore ottimo è stabile perchè vale

$$\bar{P}_{k+1} = \mathbb{E}_\gamma \left[P_{k+1}\right] \leq \mathbb{E}_\gamma \left[\tilde{P}_{k+1}\right] = \check{P}_{k+1} < M \tag{5.12}$$