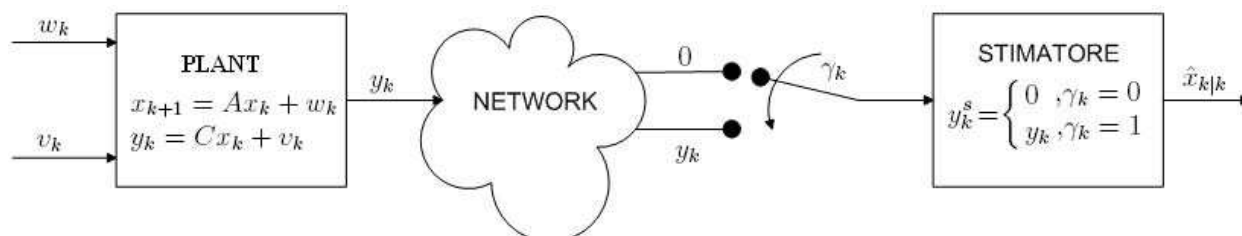


## 6.1 Stimatori con guadagno costante soggetti a perdita di pacchetti

Si consideri il seguente sistema lineare stocastico:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k & x_k, w_k \in \mathbb{R}^n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad k \in \mathbb{N} \\ y_k = Cx_k + v_k & y_k, v_k \in \mathbb{R}^m, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{cases} \quad (6.1)$$

con  $x_0$ ,  $w_k$  e  $v_k$  variabili aleatorie gaussiane, scorrelate, con media  $(\bar{x}_0, 0, 0)$  e covarianza  $(P_0, Q, R)$  rispettivamente. Si supponga inoltre che la coppia  $(A, C)$  sia osservabile e la coppia  $(A, Q^{1/2})$  sia raggiungibile, e  $R > 0^1$ .



**Figure 6.1.** Schema Plant-Network-Stimatore: le misure  $y_k$  viaggiano contenute in pacchetti attraverso una generica rete prima di arrivare allo stimatore.

Per il momento si assume che la rete non introduca ritardi nella trasmissione delle misure  $y_k$ , per cui un generico pacchetto o arriva in tempo utile oppure è definitivamente perso. Il processo degli arrivi è modellato dalla variabile aleatoria  $\gamma_k$  nel modo seguente:

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & \text{se } y_k \text{ è arrivata allo stimatore} \\ 0 & \text{se } y_k \text{ è stata persa.} \end{cases} \quad (6.2)$$

Nella trattazione che segue si trascura il rumore di quantizzazione introdotto dalla codifica/decodifica digitale dei dati: la scelta è motivata dal fatto che nella maggior parte dei casi reali esso risulta trascurabile in confronto al rumore di misura  $v_k$ . Allo stesso modo non viene considerato alcun rumore di canale in quanto se un pacchetto dovesse venire corrotto

<sup>1</sup>Alcune di queste ipotesi possono essere rilassate, ma con un notevole appesantimento delle equazioni e delle dimostrazioni e quindi non verranno trattate.

durante la trasmissione, questo sarebbe poi scartato dal ricevitore (pacchetto perso). L'obiettivo è allora il calcolo dello stimatore ottimo a minima varianza  $\hat{x}_{k|k}$  dato da<sup>2</sup>

$$\hat{x}_{k|k} \triangleq \mathbb{E} [x_k | (y_k^s, \dots, y_0^s), (\gamma_k, \dots, \gamma_0), \bar{x}_0, P_0] \quad (6.3)$$

Si definiscono l'errore di stima e la sua varianza come

$$e_{k|k} \triangleq x_k - \hat{x}_{k|k} \quad (6.4)$$

$$P_{k|k} \triangleq \mathbb{E} [e_{k|k} e_{k|k}^T | (y_k^s, \dots, y_0^s), (\gamma_k, \dots, \gamma_0), \bar{x}_0, P_0] \quad (6.5)$$

Ricordando ora che il filtro di Kalman è uno stimatore ottimo nel caso di rumore gaussiano, e che è possibile sostituire al sistema (7.1), soggetto a perdita di pacchetti, il sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + w_k \\ y_k^s = C_k x_k + \tilde{v}_k \end{cases} \quad (6.6)$$

con  $y_k^s = \gamma_k y_k$ ,  $C_k = \gamma_k C$  e  $\tilde{v}_k = \gamma_k v_k$ , si perviene alle seguenti formule, in cui si osserva che viene apportata una correzione alla stima  $\hat{x}_{k|k}$  solo se il pacchetto  $y_{k+1}$  è giunto a destinazione ( $\gamma_k = 1$ ):

$$\hat{x}_{k+1|k+1} = A\hat{x}_{k|k} + \gamma_{k+1} K_{k+1} (y_{k+1}^s - CA\hat{x}_{k|k}) \quad (6.7)$$

$$P_{k+1|k} = AP_{k|k-1}A^T + Q - \gamma_k AP_{k|k-1}C^T (CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1} CP_{k|k-1}A^T \quad (6.8)$$

$$K_k = P_{k|k-1}C^T (CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1} \quad (6.9)$$

Si ha che lo stimatore ottimo  $\hat{x}_{k|k}$  può essere calcolato ricorsivamente tenendo in memoria solamente la stima e la varianza d'errore calcolate al passo precedente. Similmente a quanto visto per il filtro di Kalman, si può pensare di utilizzare uno stimatore come quello appena descritto caratterizzato però da un guadagno  $K_k$  costante  $\forall k \in \mathbb{N}$ , definito come segue:

$$\tilde{x}_{k+1|k+1} = A\tilde{x}_{k|k} + \gamma_{k+1} K (y_{k+1}^s - CA\tilde{x}_{k|k}) \quad (6.10)$$

L'errore di stima commesso da questo nuovo stimatore è definito come

$$\tilde{e}_{k+1|k} = x_{k+1} - \tilde{x}_{k+1|k} \quad (6.11)$$

$$\tilde{x}_{k+1|k} = A\tilde{x}_{k|k} \quad (6.12)$$

la cui varianza è data da

$$\tilde{P}_{k+1|k} = \mathbb{E} [\tilde{e}_{k+1|k} \tilde{e}_{k+1|k}^T | (y_k^s, \dots, y_0^s), (\gamma_k, \dots, \gamma_0), \bar{x}_0, P_0] \quad (6.13)$$

<sup>2</sup>Osservando la (7.3) si nota come questo stimatore possieda l'informazione relativa all'esito positivo o negativo circa la consegna del pacchetto (misura)  $k$ -esimo. Non risulta quindi essere equivalente allo stimatore  $\check{x}_{k|k} \triangleq \mathbb{E} [x_k | (y_k^s, \dots, y_0^s), \bar{x}_0, P_0]$  in cui le misure fittizie (pari a 0 nel nostro caso) generate in sostituzione di quelle perse sarebbero trattate come misure vere, portando quindi a prestazioni inferiori.

Sostituendo le Equazioni (6.10) e (6.12) nell'Equazione (6.11) otteniamo:

$$\tilde{e}_{k+1|k} = A(I - \gamma_k KC)\tilde{e}_{k|k-1} + w_k - \gamma_k AKv_k$$

da cui si ricava

$$\tilde{P}_{k+1|k} = A(I - \gamma_k KC)\tilde{P}_{k|k-1}(I - \gamma_k KC)^T A^T + Q + \gamma_k AKRK^T A^T \quad (6.14)$$

ottenuta utilizzando i seguenti fatti:

- $\gamma_k^2 = \gamma_k$ ;
- $\gamma_k$ ,  $v_k$  e  $w_k$  sono indipendenti;
- $\tilde{e}_{k|k-1} \subseteq \text{span}\{\gamma_{k-1}, v_{k-1}, w_{k-1}\} \perp \text{span}\{\gamma_k, v_k, w_k\} \quad \forall k$ ;
- $v_k$  e  $w_k$  hanno media nulla.

Per semplificare la notazione si introducono i seguenti operatori:

$$\mathcal{L}_{\gamma_k}(K, \tilde{P}_{k|k-1}) \triangleq A(I - \gamma_k KC)\tilde{P}_{k|k-1}(I - \gamma_k KC)^T A^T + Q + \gamma_k AKRK^T A^T \quad (6.15)$$

$$\Phi_{\gamma_k}(P_{k|k-1}) \triangleq AP_{k|k-1}A^T + Q - \gamma_k AP_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}CP_{k|k-1}A^T \quad (6.16)$$

Si osserva che entrambi gli operatori sono funzioni di  $\gamma_k$  e in quanto tali risultano essere delle variabili aleatorie. In questo scenario una possibile metrica delle prestazioni dello stimatore è data dall'aspettazione della covarianza d'errore  $\mathbb{E}_\gamma[P_{k+1|k}]$ , dove l'aspettazione è calcolata relativamente al processo degli arrivi  $\gamma_k$ . Poiché  $P_{k+1|k}$  è una funzione non lineare in  $\gamma_k$ , non è possibile calcolare  $\mathbb{E}_\gamma[P_{k+1|k}]$  analiticamente tuttavia, essendo lo stimatore con  $K$  costante uno stimatore sub-ottimo si può certamente affermare che

$$P_{k+1|k} \leq \tilde{P}_{k+1|k} \quad (6.17)$$

e questo fatto permette, una volta determinata la varianza d'errore del filtro sub-ottimo, di stabilire un limite superiore per la varianza del filtro ottimo. Infatti la disuguaglianza sopra scritta continua a valere anche prendendo l'aspettazione di entrambi i termini, e si ottiene quindi

$$\bar{P}_{k+1} \triangleq \mathbb{E}[P_{k+1|k}] \leq \mathbb{E}[\tilde{P}_{k+1|k}] \triangleq \check{P}_{k+1} \quad (6.18)$$

Dove  $\check{P}_k$  è invece facilmente calcolabile in quanto funzione lineare in  $\gamma_k$  e costituisce un limite superiore per  $\bar{P}_k$

Il calcolo di  $\check{P}_k$  restituisce:

$$\begin{aligned}
\check{P}_{k+1} &= \mathbb{E}_\gamma[\mathcal{L}_{\gamma_k}(K, \check{P}_k)] \\
&= \mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})}[\mathbb{E}_{\gamma_k}[\mathcal{L}_{\gamma_k}(K, \check{P}_k)]] \\
&= \mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})} \left[ \mathcal{L}_{\gamma_k=0}(K, \check{P}_k)\mathbb{P}[\gamma_k = 0] + L_{\gamma_k=1}(K, \check{P}_k)\mathbb{P}[\gamma_k = 1] \right] \\
&= \mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})} \left[ (A\check{P}_{k|k-1}A^T + Q)(1 - \lambda) + \right. \\
&\quad \left. + \left( A(I - KC)\check{P}_k(I - KC)^T A^T + Q + AKRK^T A^T \right) \lambda \right] \\
&= \left( A\mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})}[\check{P}_{k|k-1}]A^T + Q \right) (1 - \lambda) + \\
&\quad + \left( A(I - KC)\mathbb{E}_{(\gamma_0, \dots, \gamma_{k-1})}[\check{P}_{k|k-1}](I - KC)^T A^T + Q + AKRK^T A^T \right) \lambda \\
&= \lambda A(I - KC) \check{P}_k (I - KC)^T A^T + (1 - \lambda) A \check{P}_k A^T + Q + \lambda AKRK^T A^T \quad (6.19)
\end{aligned}$$

Si definisce ora un nuovo operatore:

$$\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P) \triangleq \lambda A(I - KC)P(I - KC)^T A^T + (1 - \lambda)APA^T + Q + \lambda AKRK^T A^T, \quad (6.20)$$

Si ricordi inoltre la definizione data precedentemente dell'operatore  $\Phi_{\gamma_k}$ , che puo' essere usata anche nel modo seguente:

$$\Phi_\lambda(P) = APA^T + Q - \lambda APC^T(CPC^T + R)^{-1}CPA^T. \quad (6.21)$$

Tutte le matrici  $\check{P}_k$  per  $k = 0, 1, \dots$  possono essere ottenute risolvendo le equazioni:

$$\check{P}_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, \check{P}_k)$$

con  $\check{P}_0 = P_0$ . La stabilità dello stimatore puo' quindi essere dedotta dalle proprietà dell'operatore  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$ .

**Teorema 6.1.** *L'operatore  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$  definito in Equazione (6.20), e l'operatore  $\Phi_\lambda(P)$  definito in Equazione (6.21), dove  $\lambda \in [0, 1]$  godono delle seguenti proprietà:*

1.  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$  e' affine in  $P$  per  $K$  fissato
2.  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$  e' positivo, cioe'  $P \geq 0 \implies \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P) \geq 0, \forall K$
3.  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$  e' monotono crescente, cioe'  $P_1 \geq P_2 \implies \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P_1) \geq \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P_2), \forall K$
4.  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P) = \Phi_\lambda(P) + \lambda A(K - K_P)(CPC^T + R)(K - K_P)^T A^T$ ,  
con  $K_P \triangleq PC^T(CPC^T + R)^{-1}$ ;
5.  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P) \geq \Phi_\lambda(P), \forall K$ , o equivalentemente  $\Phi_\lambda(P) = \min_K \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$ .

6.  $\Phi_\lambda(P)$  e' monotono crescente in  $P$ , cioe'  $P_1 \geq P_2 \implies \Phi_\lambda(P_1) \geq \Phi_\lambda(P_2)$
7.  $\Phi_\lambda(P)$  e' monotono decrescente in  $\lambda$ , cioe'  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  con  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  si ha  $\Phi_{\lambda_1}(P) \leq \Phi_{\lambda_2}(P), \forall P$ .

**Dimostrazione:** La dimostrazione delle proprieta' 1)-6) e' simile a quelle gia' viste per l'operatore nel caso del filtro statico senza perdita di pacchetti, che si ottiene per  $\lambda = 1$ . La proprieta' 7) si vede facilmente dal fatto che  $\Phi_{\lambda_1}(P) - \Phi_{\lambda_2}(P) = -(\lambda_1 - \lambda_2)APC^T(CPC^T + R)^{-1}CPA^T \leq 0$ .  $\square$

Dalle precedenti proprieta' ed in particolare dalla proprieta' 7) si evince che l'operatore  $\Phi_\lambda(P)$  è monotono non decrescente in  $\lambda$ , nel senso che maggiore è la probabilita' che i pacchetti arrivino allo stimatore, migliore è la prestazione dello stimatore che si puo' ottenere. Si consideri ora  $A$  instabile. Partendo da questa considerazione si noti che per  $\lambda = 1$  il fitro è stabile (*filtro di Kalman standard*) e per  $\lambda = 0$  il fitro è instabile (*nessuna osservazione*) è possibile ottenere il grafico di Figura 7.2. Si osserva che se per  $\lambda_1 < 1$  il filtro è stabile, allora lo sarà anche per ogni  $\lambda \geq \lambda_1$ , analogamente se il filtro è instabile per  $\lambda_2 > 0$ , allora sarà instabile per ogni  $\lambda \leq \lambda_2$ . Quindi deve esistere un valore  $\lambda_c$ , tale che per  $\lambda > \lambda_c$  l'operatore e' stabile, mentre per  $\lambda < \lambda_c$  l'operatore e' instabile.

Questo tipo di considerazione di tipo intuitivo e' formalizzata nel seguente teorema:

**Teorema 6.2.** Si considerino gli operatori  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$  e  $\Phi_\lambda(P)$  definiti precedentemente. Si assuma inoltre che la coppia  $(A, C)$  sia osservabile,  $(A, Q^{1/2})$  raggiungibile e  $R > 0$ .

1. Se  $A$  è instabile allora esiste  $\lambda_c : \forall \lambda > \lambda_c$  la successione definita da

$$S_{k+1} = \Phi_\lambda(S_k) \quad (6.22)$$

converge all'unico punto fisso  $S_\infty = \Phi_\lambda(S_\infty)$  dove  $S_\infty > 0$ , cioe'

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S_\infty, \forall S_0 \geq 0.$$

Se  $\lambda < \lambda_c$  invece tutte le successioni sono illimitate cioe'  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = +\infty, \forall S_0 \geq 0$

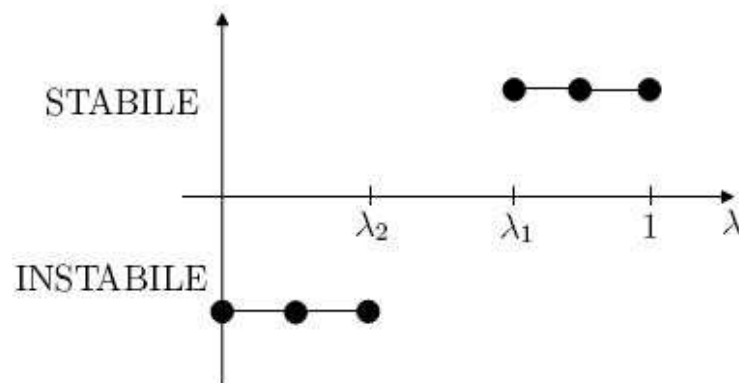


Figure 6.2. Stabilità del filtro in funzione di  $\lambda$

2. Il guadagno ottimo del punto fisso  $S_\infty$

$$K_\infty = S_\infty C^T (C S_\infty C^T + R)^{-1}$$

è il guadagno statico ottimo a regime, nel senso che date le due successioni  $T_{k+1}$  e  $V_{k+1}$  vale

$$T_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K_\infty, T_k) \longrightarrow S_\infty$$

$$V_{k+1} = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, V_k) \longrightarrow V_\infty$$

si ha  $S_\infty \leq V_\infty \forall K \neq K_\infty$ , o in maniera equivalente:

$$S_\infty = \min_K V_\infty \quad (6.23)$$

$$\text{tale che } V_\infty = \bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, V_\infty) \quad (6.24)$$

3. Per quanto riguarda  $\lambda_c$  in generale non e' possibile calcolarne analiticamente il valore, ma puo' essere ottenuto in maniera numerica risolvendo un problema di ottimizzazione convessa. Tuttavia e' possibile definire un limite superiore ed uno inferiore:

$$\lambda_{min} \leq \lambda_c \leq \lambda_{max}$$

dove

$$\lambda_{min} = 1 - \frac{1}{\sigma_{max}^2(A)}$$

con  $\sigma_{max} \triangleq$  massimo autovalore di  $A$ , e

$$\lambda_{max} = 1 - \frac{1}{\prod_j [\sigma_j^{inst}(A)]^2}$$

con  $\sigma_j^{inst} \triangleq$   $j$ -esimo autovalore instabile di  $A$ .

In particolare si avrà che  $\lambda_c = \lambda_{min}$  nel caso in cui  $C$  sia una matrice quadrata invertibile, viceversa  $\lambda_c = \lambda_{max}$  nel caso in cui  $C$  abbia rango 1.

4. Essendo  $S_\infty$  una funzione di  $\lambda$  si ha infine

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \implies S_\infty(\lambda_1) \leq S_\infty(\lambda_2)$$

**Dimostrazione:** La dimostrazione per l'affermazione 1) si ottiene facendo delle considerazioni di continuita' come accennato prima del teorema. Infatti sappiamo certamente che per  $\lambda = 1$  le successioni convergono e quindi lo stimatore e' stabile, mentre per  $\lambda = 0$  le successioni divergono. Poiche'  $\Phi_\lambda(P)$  e' una funzione continua di  $\lambda$  allora per continuita' anche la soluzione  $S_\infty$  deve essere continua. Utilizzando poi la monotonicita' decrescente in  $\lambda$  di  $\Phi_\lambda(P)$  si deduce che esiste un certo  $\lambda_c$ . La difficolta di trovare in maniera esplicita  $\lambda_c$  sta nel fatto che mentre prima la stabilita' dell'operatore  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K, P)$  era direttamente legata

alla stabilita' di  $A_c = A(I - KC)$ , adesso gli autovalori e autovettori non si possono calcolare utilizzando gli stessi ragionamenti utilizzati nel caso senza perdita di pacchetti. La dimostrazione di esistenza, unicita', positivit  e convergenza a  $S_\infty$  per ogni condizione iniziale e' esattamente analoga a quella gi  viste nel caso senza perdita di pacchetti. Lo stesso vale anche per la proposizione 2).

Per quel che riguarda la proposizione 3) il  $\lambda_{min}$  e' facilmente ricavabile osservando che nel caso in cui  $C$  sia invertibile allora posso scegliere  $K = C^{-1}$ , cosi' che  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K = C^{-1}, P) = (1 - \lambda)APA^T + Q + \lambda AC^{-1}R(C^{-1})^T A^T = A_\lambda P A_\lambda^T + D$ , dove  $A_\lambda = \sqrt{1 - \lambda}A$  e  $D \geq 0$ . In questo caso l'operatore  $\bar{\mathcal{L}}_\lambda(K = C^{-1}, P)$  risulta essere l'operatore di Lyapunov che ammette punto fisso se e solo se  $A_\lambda$  e' strettamente stabile. La matrice  $A_\lambda$  e' stabile se e solo se gli autovalori  $|\sigma_i(A_\lambda)| < 1$ . Poiche'  $\sigma_i(A_\lambda) = \sqrt{1 - \lambda}\sigma_i(A)$  si ottiene facilmente che la condizione di stabilita' e' equivalente a  $\lambda > 1 - \frac{1}{|\sigma_{max}(A)|^2}$ .  $\square$

Da un punto di vista pratico poich  non   in genere possibile ricavare  $S_\infty$  risolvendo analiticamente la MARE (*Modified Algebraic Riccati Equation*)  $S_\infty = \Phi_\lambda(S_\infty)$ , si ricorre ad un calcolo approssimato iterando l'equazione per un certo numero di passi a partire dalla condizione iniziale  $S_0 = 0$  e, si osserva se la successione diverge, o converge ad una  $S_\infty$ , sempre sotto le ipotesi di osservabilita' della coppia  $(A, C)$  e raggiungibilita' della coppia  $(A, Q^{1/2})$ .

Ulteriori dettagli sulle proprieta' degli operatori, criteri di convergenza, stabilita' e algoritmi numerici per il calcolo di  $\lambda_c$  si possono trovare in [2] e [1].

# Bibliography

- [1] L. Schenato. Optimal estimation in networked control systems subject to random delay and packet drop. In *to appear in IEEE Transactions on Automatic Control*. [Online] available at [http://www.dei.unipd.it/~schenato/didattica/PSC07/Revised\\_paper\\_IEEE\\_AC06\\_155.pdf](http://www.dei.unipd.it/~schenato/didattica/PSC07/Revised_paper_IEEE_AC06_155.pdf).
- [2] B. Sinopoli, L. Schenato, M. Franceschetti, K. Poolla, M.I. Jordan, and S. Sastry. Kalman filtering with intermittent observations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9):1453–1464, September 2004.